

Einführung in die Topologie

Andreas Gathmann

Vorlesungsskript RPTU Kaiserslautern 2023

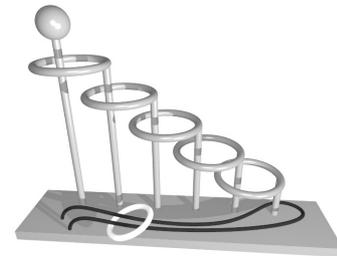
Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung und Motivation	3
1. Topologische Räume	5
2. Stetige Abbildungen.	14
3. Zusammenhang	22
4. Trennung und Kompaktheit	27
5. Quotientenräume.	38
6. Homotopie.	51
7. Die Fundamentalgruppe	59
8. Überlagerungen	67
9. Anwendungen der Fundamentalgruppe	77
Literatur	90
Index	91

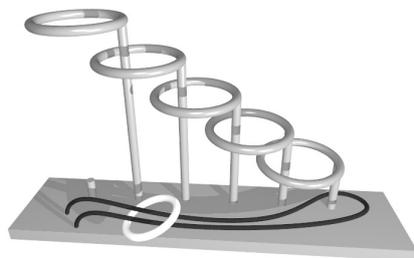
0. Einleitung und Motivation

Anschaulich ausgedrückt ist die Topologie das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit *Deformationen* von Objekten beschäftigt – und mit Eigenschaften, die unter solchen Deformationen unverändert bleiben. So behält z. B. ein Rettungsring seine Eigenschaft, ein „Loch“ zu haben, auch dann bei, wenn man ihn verformt oder die Luft heraus lässt und ihn irgendwie zusammendrückt. Eine zusammenhängende Menge z. B. in der Ebene bleibt zusammenhängend, wenn man die Ebene beliebig deformiert. Zwei ineinander verschlungene Ringe lassen sich durch Deformationen nicht voneinander trennen. Dies alles sind topologische Aussagen – und sie zeigen, dass die Topologie von der Idee her wohl eines der anschaulichsten Gebiete der Mathematik ist.

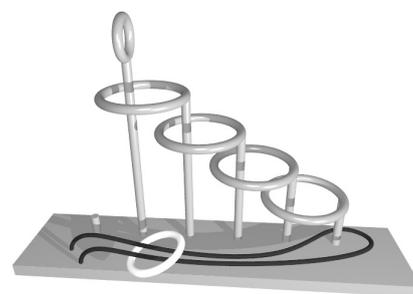
Schauen wir uns als konkretes Beispiel einmal das rechts abgebildete Puzzlespiel an. Das eigentliche Gestell (also die Platte unten und die insgesamt sechs Stangen mit der Kugel bzw. den horizontalen Ringen drauf) ist dabei aus Holz gefertigt und damit also nicht beweglich. Die schwarze Schnur ist an den Enden links auf der Platte befestigt und verläuft um die letzte der sechs Stangen herum. Ziel des Spiels ist es, diese Schnur so um die Stangen und durch die Ringe zu fädeln, dass sie letztlich „frei“ ist und man den weißen Ring unten herausnehmen kann. Wir wollen dabei annehmen, dass die Schnur lang genug ist, um alle dafür notwendigen Bewegungen zuzulassen.



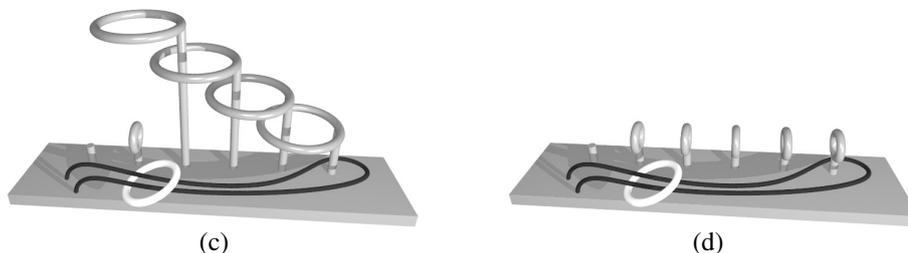
Wenn man dieses Puzzlespiel konkret in der Hand hält und damit herumspielt, erscheint es einem auf den ersten Blick sehr verwirrend und schwierig. Dabei ist aus topologischer Sicht, also wenn wir einmal Deformationen des Raumes bzw. des Holzgestells betrachten, einfach einzusehen, dass und auch wie das Puzzle lösbar sein muss: beginnen wir einmal mit der Kugel oben links. Es ist klar, dass diese Kugel keinerlei echte Funktion erfüllt und das Problem genauso einfach oder schwierig wäre, wenn die Kugel nicht da wäre, also wenn man sie immer kleiner machen würde bis sie schließlich verschwindet. Dasselbe gilt dann natürlich auch für die gesamte linke Stange, die man immer kürzer machen könnte, ohne dass sich das eigentliche Problem ändert. Das Puzzle in Abbildung (a) unten, bei dem die linke Stange fehlt, ist also praktisch äquivalent zum ursprünglichen.



(a)



(b)



Setzen wir diese Deformationsüberlegungen weiter fort, so sehen wir genauso, dass man den Ring links oben wie in Abbildung (b) auch senkrecht stellen und kleiner machen könnte, ohne dass wir das eigentliche Problem ändern. Danach können wir natürlich auch die darunter liegende Stange immer kürzer machen, so dass der Ring wie in Abbildung (c) letztlich direkt auf der Bodenplatte sitzt. Mit denselben Überlegungen für die anderen vier Ringe folgt also, dass unser ursprüngliches Puzzle effektiv dasselbe ist wie das in Abbildung (d) – das aber offensichtlich trivial ist, denn hier kann man den weißen Ring ja einfach herausnehmen. Wir können dieses Puzzle (und auch die meisten anderen dieser Art, von denen ihr sicher schon einige gesehen habt) also letztlich als topologisches Puzzle bezeichnen. Erstaunlicherweise hilft diese Erkenntnis den meisten Leuten allerdings noch nicht besonders viel bei der konkreten Lösung des ursprünglichen Puzzles: unsere ganzen oben gemachten Vereinfachungen in Schnurbewegungen um die „eigentlich überflüssigen“ Holzstangen und Ringe umzuwandeln ist in der Praxis nicht so einfach.

Topologie wird übrigens in der einen oder anderen Form auch in vielen anderen Gebieten der Mathematik benötigt. Wahrscheinlich sind euch topologische Konzepte auch bereits mehrfach in vorherigen Vorlesungen begegnet: z. B. offene, abgeschlossene oder zusammenhängende Mengen in den Grundlagen der Mathematik, homotope Wege in der Funktionentheorie, oder kompakte Mengen in der Funktionalanalysis.

Wir werden uns in dieser Vorlesung die wesentlichen Konzepte der Topologie erarbeiten. Aus mathematischer Sicht bedeutet das „Studium der Deformationen“ einfach, dass wir *stetige Abbildungen* betrachten wollen. In der Tat sind die sogenannten *topologischen Räume* (die wir gleich als Erstes in Definition 1.1 einführen werden) und stetigen Abbildungen zwischen ihnen für die Topologie genauso grundlegend und zentral wie beispielsweise die Vektorräume und linearen Abbildungen in der linearen Algebra.

Besonders bemerkenswert ist dabei übrigens, dass die grundlegende Definition eines topologischen Raumes trotz ihrer anschaulichen Motivation zunächst so abstrakt und allgemein klingt, dass man auf den ersten Blick gar nicht vermuten würde, dass dabei etwas Sinnvolles herauskommen kann. Wir werden uns aber sehr schnell vom Gegenteil überzeugen können und sehen, dass es gerade dieses Wechselspiel zwischen abstrakter Theorie einerseits und sehr anschaulichen Sätzen und Beispielen andererseits ist, das die Topologie so interessant macht.

1. Topologische Räume

Wie schon in der Einleitung erwähnt wollen wir uns in dieser Vorlesung mit *stetigen Abbildungen* beschäftigen. Als Erstes müssen wir uns daher fragen, welche Struktur die Start- und Zielräume der betrachteten Abbildungen haben müssen, damit wir den Begriff der stetigen Abbildung zwischen ihnen überhaupt erst einmal sinnvoll definieren können.

Aus den „Grundlagen der Mathematik“ wisst ihr auf diese Frage bereits eine erste Antwort: Für *metrische Räume* (also insbesondere auch für normierte Vektorräume) kann man stetige Abbildungen mit dem üblichen „ ε - δ -Kriterium“ einführen und untersuchen [G2, Definition 23.10 und 24.1]. In der Tat wollen wir die elementaren Eigenschaften solcher stetigen Abbildungen zwischen metrischen Räumen wie z. B. in [G2, Kapitel 23 und 24] im Folgenden als bekannt voraussetzen.

Beachte jedoch, dass ein metrischer Raum für unsere Zwecke eigentlich schon zu viele Informationen enthält. So haben wir ja z. B. bereits in den „Grundlagen der Mathematik“ bei der Untersuchung der Äquivalenz von Normen [G2, Lemma 23.17 und Bemerkung 23.18] gesehen, dass verschiedene Metriken auf \mathbb{R}^n durchaus zu gleichen topologischen Eigenschaften führen können. Der Grund hierfür ist letztlich, dass wir in der Topologie zwei Räume X und Y schon als gleichwertig ansehen können, wenn es zwischen ihnen eine bijektive Abbildung $f: X \rightarrow Y$ gibt, so dass sowohl f als auch die Umkehrabbildung f^{-1} stetig ist (siehe Definition 2.13 und Bemerkung 2.14). Anschaulich bedeutet dies einfach, dass Y eine Deformation von X ist – und eine Deformation kann natürlich problemlos die Abstände zwischen Punkten ändern. Für topologische Untersuchungen sollte es also eigentlich gar nicht erst nötig sein, Abstände zwischen Punkten messen zu können, d. h. eine Metrik festzulegen.

Aber ohne Metrik gibt es keine ε -Umgebungen, und damit kein ε - δ -Kriterium. Wie kann man dann trotzdem noch stetige Abbildungen definieren? Dazu erinnern wir uns daran, dass eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen genau dann stetig ist, wenn das Urbild $f^{-1}(U)$ jeder offenen Menge $U \subset Y$ wieder offen in X ist [G2, Satz 24.17]. Dies bedeutet für uns zwei Dinge:

- Wenn wir lediglich wissen, welche Teilmengen eines gegebenen Raumes offen sind, so genügt uns dies, um über Stetigkeit reden zu können.
- Ist $f: X \rightarrow Y$ wie oben bijektiv, so dass f und f^{-1} beide stetig sind und X und Y damit als topologisch gleichwertig anzusehen sind, so sind sowohl Bilder als auch Urbilder offener Mengen unter f wieder offen, d. h. f identifiziert die offenen Mengen von X genau mit denen von Y . Die Information darüber, welche Teilmengen offen sind, bleibt im Gegensatz zur Metrik unter derartigen Abbildungen also erhalten.

Dies führt unmittelbar zur Idee eines *topologischen Raumes*, den wir nun genau dadurch definieren wollen, dass wir in ihm festgelegt haben, welche Teilmengen offen heißen sollen und welche nicht. Diese Festlegung können wir jedoch nicht völlig beliebig vornehmen, denn es sollten zumindest die aus den Grundlagen der Mathematik bekannten Standardeigenschaften offener Mengen gelten: nämlich dass beliebige Vereinigungen und endliche Durchschnitte offener Mengen wieder offen sind [G2, Lemma 23.35].

Für eine Menge X bezeichnen wir im Folgenden mit $\mathcal{P}(X)$ die Menge aller Teilmengen von X , die sogenannte *Potenzmenge* von X .

Definition 1.1 (Topologische Räume). Es sei X eine Menge. Eine Menge $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt **Topologie** auf X , wenn gilt:

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$;
- sind $U_i \in \mathcal{T}$ für alle i aus einer beliebigen Indexmenge J , so ist auch $\bigcup_{i \in J} U_i \in \mathcal{T}$ (d. h. „ \mathcal{T} ist abgeschlossen unter beliebigen Vereinigungen“);

- (c) sind $U, V \in \mathcal{T}$, so ist auch $U \cap V \in \mathcal{T}$ (d. h. „ \mathcal{T} ist abgeschlossen unter Durchschnitten von zwei und damit auch von endlich vielen Mengen“).

Man nennt (X, \mathcal{T}) in diesem Fall einen **topologischen Raum** und schreibt ihn auch einfach als X , wenn die betrachtete Topologie aus dem Zusammenhang klar ist.

Die Mengen in \mathcal{T} heißen **offen** bezüglich dieser Topologie. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, wenn ihr Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Sind \mathcal{T}_1 und \mathcal{T}_2 zwei Topologien auf derselben Menge X mit $\mathcal{T}_1 \subsetneq \mathcal{T}_2$, so heißt \mathcal{T}_1 **gröber** als \mathcal{T}_2 bzw. \mathcal{T}_2 **feiner** als \mathcal{T}_1 (woher dieser Name kommt, werden wir in Beispiel 1.22 sehen).

Beispiel 1.2 (Metrische Räume sind topologische Räume). Ist (X, d) ein *metrischer Raum* [G2, Definition 23.10] und bezeichnet

$$U_r(a) := \{x \in X : d(x, a) < r\}$$

für $a \in X$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$ wie üblich die offene Kugel vom Radius r um a , so wissen wir aus den „Grundlagen der Mathematik“ bereits, dass X dann zu einem topologischen Raum wie in Definition 1.1 wird, wenn wir eine Teilmenge $U \subset X$ offen nennen (also U in \mathcal{T} liegt), wenn es zu jedem Punkt $a \in U$ ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $U_\varepsilon(a) \subset U$ [G2, Definition 23.33 (a) und Lemma 23.35]. Wie man leicht nachprüft, sind dann z. B. alle Kugeln $U_r(a)$ offen [G2, Beispiel 23.34 (c)].

Diese Festlegung ist die Standardtopologie auf metrischen Räumen – wir werden metrische Räume also immer auf diese Art als topologische Räume auffassen, sofern wir nichts anderes angeben.

Ist X eine Teilmenge von \mathbb{R}^n für ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so wollen wir darüber hinaus festlegen, dass wir X ohne gegenteilige Angaben stets als metrischen Raum mit der euklidischen Metrik, und somit auch wie oben als topologischen Raum ansehen wollen. Dabei benutzen wir die folgenden in der Topologie üblichen Standardnotationen: Es bezeichnet für $n \in \mathbb{N}$

- (a) $I := [0, 1] \subset \mathbb{R}$ das *Einheitsintervall*, und damit $I^n = [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$ den n -dimensionalen *Einheitswürfel*;
- (b) $D^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ die n -dimensionale abgeschlossene *Einheitskugel* in der euklidischen Norm $\|\cdot\|_2$ in \mathbb{R}^n ;
- (c) $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\|_2 = 1\}$ die n -dimensionale *Einheitssphäre* in \mathbb{R}^{n+1} .

Die Einheitskreislinie $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ und den Einheitskreis $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ werden wir dabei auch oft als Teilmengen von \mathbb{C} auffassen.

Bemerkung 1.3 (Eigenschaften abgeschlossener Mengen). Sind U_i Teilmengen eines topologischen Raumes X für alle i in einer beliebigen Indexmenge J , so gelten bekanntlich die mengentheoretischen Beziehungen

$$X \setminus \bigcup_{i \in J} U_i = \bigcap_{i \in J} (X \setminus U_i) \quad \text{und} \quad X \setminus \bigcap_{i \in J} U_i = \bigcup_{i \in J} (X \setminus U_i).$$

Durch Übergang zum Komplement erhalten wir also aus den Eigenschaften (a) bis (c) von Definition 1.1 sofort die folgenden äquivalenten Eigenschaften für abgeschlossene Mengen:

- (a) \emptyset und X sind abgeschlossen;
- (b) beliebige Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen;
- (c) endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen;

Bemerkung 1.4. Es ist in Definition 1.1 wichtig, dass zwar *beliebige* Vereinigungen, aber nur *endliche* Durchschnitte offener Mengen wieder offen sein müssen. Natürlich hätten wir auch eine andere Definition hinschreiben und z. B. verlangen können, dass beliebige Vereinigungen und Durchschnitte offener Mengen wieder offen sind – aber dann wäre nicht einmal der \mathbb{R}^n mit den üblichen Festlegungen wie in Beispiel 1.2 ein topologischer Raum geworden, denn dort ist ja z. B. der unendliche Durchschnitt offener Mengen

$$\bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}} U_\varepsilon(0) = \{0\}$$

nicht offen.

Beispiel 1.5 (Beispiele topologischer Räume). Hier sind ein paar weitere Beispiele topologischer Räume, die sich von der Standardtopologie auf \mathbb{R}^n stark unterscheiden:

- (a) (*Postamtmetrik*) Wie man leicht nachprüft, definiert

$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik (und damit nach Beispiel 1.2 auch eine Topologie) auf $X = \mathbb{R}^n$. Man nennt sie die *Postamtmetrik*, da sie die Laufzeit eines Briefes von x nach y beschreibt, wenn jeder Brief, der nicht den gleichen Zielort y wie Absendeort x hat, über ein Postamt im Nullpunkt geschickt werden muss.

- (b) Auf jeder beliebigen Menge X ist $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ trivialerweise eine Topologie; sie heißt die **diskrete Topologie** auf X . Sie ist die feinste mögliche Topologie auf X : In ihr ist *jede* Teilmenge von X offen (und damit auch jede Teilmenge abgeschlossen).

Analog ist auch $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$, d. h. wenn nur die leere Menge und der gesamte Raum offen sind, auf jeder Menge X eine Topologie. Sie wird die **indiskrete Topologie** auf X genannt. Da die leere Menge und der gesamte Raum nach Definition 1.1 (a) immer offen sein müssen, ist dies die größte mögliche Topologie auf X .

- (c) Auf jeder beliebigen Menge X definiert

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ ist endlich}\}$$

offensichtlich eine Topologie auf X ; in ihr sind also neben der leeren Menge genau die Komplemente endlicher Mengen offen. Wir nennen sie die **Komplement-endlich-Topologie** auf X . Analog ist auch

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ ist (endlich oder) abzählbar}\}$$

eine Topologie, die wir die **Komplement-abzählbar-Topologie** auf X nennen.

Bemerkung 1.6 (Topologien auf Mengen mit drei Elementen). Wie man an diesen Beispielen schon sehen kann, ist der Begriff eines topologischen Raumes sehr allgemein. Dies wird auch noch einmal deutlich, wenn wir eine Menge X mit nur drei Elementen betrachten und uns fragen: Wie viele verschiedene Topologien $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ gibt es in diesem Fall? Zunächst einmal gibt es natürlich $|\mathcal{P}(X)| = 2^3 = 8$ Teilmengen von X , von denen \emptyset und X nach Definition 1.1 (a) in jedem Fall in \mathcal{T} liegen müssen. Da wir von jeder der übrigen 6 Teilmengen nun noch entscheiden können, ob sie in \mathcal{T} liegt oder nicht, haben wir zunächst einmal noch $2^6 = 64$ Möglichkeiten für \mathcal{T} . Durch Überprüfen aller dieser Möglichkeiten stellt man fest, dass 29 davon auch die Eigenschaften (b) und (c) aus Definition 1.1 erfüllen, also wirklich Topologien auf X sind. Diese für eine nur dreielementige Menge sehr große Zahl erlaubter Möglichkeiten zeigt noch einmal deutlich, wie vielfältig topologische Räume sind.

Natürlich sind aber nicht alle diese Topologien auch praktisch relevant. Sehr wichtig ist dagegen, dass sich eine Topologie auf einer Menge unmittelbar wie folgt auf jede Teilmenge übertragen lässt.

Konstruktion 1.7 (Teilraumtopologie). Es seien (X, \mathcal{T}_X) ein topologischer Raum und $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge von X . Wir setzen

$$\mathcal{T}_Y := \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}_X\},$$

d. h. nennen eine Teilmenge von Y genau dann offen, wenn sie der Schnitt von Y mit einer in X offenen Menge ist. Dann ist \mathcal{T}_Y eine Topologie auf Y , denn die drei Axiome aus Definition 1.1 sind schnell überprüft:

- (a) $\emptyset = Y \cap \emptyset$ und $Y = Y \cap X$ sind offen in \mathcal{T}_Y , weil \emptyset und X offen in \mathcal{T}_X sind;
 (b) sind $U_i \in \mathcal{T}_Y$ für $i \in J$, also $U_i = Y \cap V_i$ für $V_i \in \mathcal{T}_X$, so ist auch $\bigcup_{i \in J} U_i = Y \cap \bigcup_{i \in J} V_i \in \mathcal{T}_Y$;
 (c) sind $U_1, U_2 \in \mathcal{T}_Y$, also $U_1 = Y \cap V_1$ und $U_2 = Y \cap V_2$ für gewisse $V_1, V_2 \in \mathcal{T}_X$, so ist damit auch $U_1 \cap U_2 = Y \cap (V_1 \cap V_2) \in \mathcal{T}_Y$.

Wir nennen \mathcal{T}_Y die (von \mathcal{T}_X induzierte) **Teilraumtopologie** oder **Relativtopologie** auf Y . Die Teilraumtopologie ist die Standardtopologie auf Teilmengen topologischer Räume. Sofern wir nichts anderes angeben, werden wir Teilmengen topologischer Räume in Zukunft also immer mit dieser Teilraumtopologie betrachten.

Aufgabe 1.8. Es sei Y eine beliebige Teilmenge eines metrischen Raumes X . Wir haben dann oben zwei Arten kennen gelernt, wie man auf Y eine natürliche Topologie definieren kann:

- (a) Y ist mit der Einschränkung der Metrik auf X auch selbst ein metrischer Raum und hat damit eine zugehörige Standardtopologie wie in Beispiel 1.2.
- (b) Y ist eine Teilmenge des topologischen Raumes X und hat damit eine zugehörige Teilraumtopologie wie in Konstruktion 1.7.

Zeige, dass diese beiden Topologien auf Y übereinstimmen. Es können also keine Missverständnisse entstehen, wenn wir Teilmengen metrischer Räume in Zukunft ohne weitere Angaben als topologische Räume betrachten.

Beispiel 1.9.

- (a) Im topologischen Raum $[0, 2] \subset \mathbb{R}$ ist die Teilmenge $[0, 1)$ offen, denn sie ist der Durchschnitt von $[0, 2]$ mit der in \mathbb{R} offenen Menge $(-1, 1)$.
- (b) In $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ist jede einpunktige Menge $\{a\} = \mathbb{Z} \cap (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ für $a \in \mathbb{Z}$ offen. Da Vereinigungen offener Mengen wieder offen sind, ist damit also *jede* Teilmenge von \mathbb{Z} in der Teilraumtopologie von \mathbb{Z} offen: Die Teilraumtopologie von \mathbb{Z} in \mathbb{R} ist die diskrete Topologie.

Aufgabe 1.10. Es sei Y eine Teilmenge eines topologischen Raumes X . Man zeige:

- (a) Eine Teilmenge von Y ist genau dann abgeschlossen in der Teilraumtopologie von Y , wenn sie von der Form $Y \cap A$ für eine in X abgeschlossene Menge A ist.
- (b) Ist Y offen, so ist eine Teilmenge von Y genau dann offen in der Teilraumtopologie von Y , wenn sie offen in X ist.
- (c) Ist Y abgeschlossen, so ist eine Teilmenge von Y genau dann abgeschlossen in der Teilraumtopologie von Y , wenn sie abgeschlossen in X ist.

Um noch weitere Topologien einfacher konstruieren zu können, benötigen wir den Begriff der Basis einer Topologie. Die Idee hierfür kommt aus dem folgenden Lemma für metrische Räume.

Lemma 1.11 (Offene Mengen in metrischen Räumen). *Eine Teilmenge U eines metrischen Raumes X ist genau dann offen, wenn sie eine Vereinigung von offenen Kugeln ist.*

Beweis. „ \Rightarrow “: Es sei $U \subset X$ offen. Nach Beispiel 1.2 bedeutet dies, dass es um jeden Punkt $a \in U$ eine Kugel $U_{\varepsilon_a}(a)$ gibt, die noch ganz in U liegt. Dann ist aber

$$\begin{aligned} U &\subset \bigcup_{a \in U} U_{\varepsilon_a}(a) && \text{(denn } a \in U_{\varepsilon_a}(a) \text{ für alle } a \in U) \\ &\subset U && \text{(wegen } U_{\varepsilon_a}(a) \subset U). \end{aligned}$$

Also gilt die Gleichheit, d. h. U ist eine Vereinigung offener Kugeln.

„ \Leftarrow “: Da jede offene Kugel offen ist, ist eine Vereinigung solcher Kugeln nach Definition 1.1 (b) natürlich auch offen. \square

In der Tat ist es in vielen topologischen Räumen möglich, alle offenen Mengen aus einer einfacheren Klasse von Teilmengen zu erzeugen, indem man beliebige Vereinigungen bildet. Wir definieren daher:

Definition 1.12 (Basis einer Topologie). Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Man nennt eine Menge $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X eine **Basis** von \mathcal{T} bzw. von (X, \mathcal{T}) , wenn für alle $U \subset X$ gilt, dass U genau dann offen ist (also in \mathcal{T} liegt), wenn U eine Vereinigung von Elementen aus \mathcal{B} ist.

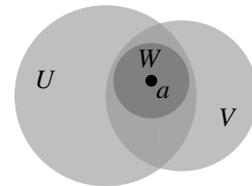
Bemerkung 1.13.

- (a) Nach Lemma 1.11 bilden die offenen Kugeln in einem metrischen Raum eine Basis der Topologie.
- (b) Ist \mathcal{B} eine Basis eines topologischen Raumes (X, \mathcal{T}) , so muss natürlich auch jedes Element von \mathcal{B} (als einelementige Vereinigung von sich selbst) offen sein. Es ist also stets $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Hat man eine konkrete Basis \mathcal{B} von \mathcal{T} gegeben, so werden die Mengen in \mathcal{B} daher auch als **basis-offene Mengen** bezeichnet.
- (c) Der Begriff einer Basis einer Topologie hat nichts mit dem Begriff einer Basis eines Vektorraumes zu tun und „verhält sich auch nicht analog“. Eine Basis gemäß Definition 1.12 hat nämlich keinerlei Minimalitätseigenschaft – so ist z. B. die Menge $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ aller offenen Mengen immer eine Basis von \mathcal{T} (wenn auch eine ziemlich langweilige). Es stimmt also z. B. auch nicht, dass sich jede offene Menge *eindeutig* als Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} schreiben lassen muss (wie man aufgrund des Basisbegriffs in der linearen Algebra vielleicht vermuten könnte).

Die eigentliche Bedeutung von Basen kommt daher, dass man mit ihnen gut Topologien konstruieren kann, indem man eine möglichst einfache Basis angibt. Dazu müssen wir natürlich wissen, welche Mengensysteme $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ hierfür geeignet sind, also wirklich eine Basis einer Topologie darstellen. Dies klärt der folgende Satz.

Satz 1.14 (Konstruktion von Topologien aus Basen). *Es seien X eine Menge und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Menge von Teilmengen von X mit den folgenden beiden Eigenschaften:*

- (1) $\bigcup_{U \in \mathcal{B}} U = X$ („die Vereinigung aller Mengen aus \mathcal{B} ist der gesamte Raum“);
- (2) für alle $U, V \in \mathcal{B}$ und $a \in U \cap V$ gibt es (wie im Bild rechts) ein $W \in \mathcal{B}$ mit $a \in W \subset U \cap V$.



Dann ist \mathcal{B} Basis einer eindeutigen Topologie \mathcal{T} auf X . Man nennt \mathcal{T} die von \mathcal{B} **erzeugte Topologie**.

Beweis. Wir betrachten das Mengensystem

$$\mathcal{T} := \left\{ \bigcup_{i \in J} U_i : \text{es gibt eine Indexmenge } J \text{ und } U_i \in \mathcal{B} \text{ für alle } i \in J \right\}$$

aller Teilmengen von X , die sich als Vereinigung von Elementen aus \mathcal{B} schreiben lassen. Nach Definition 1.12 kommt natürlich nur dieses \mathcal{T} als Topologie mit Basis \mathcal{B} in Frage – was bereits die Eindeutigkeit zeigt. Wir müssen also nur noch zeigen, dass \mathcal{T} wirklich eine Topologie ist, also die drei Eigenschaften aus Definition 1.1 erfüllt:

- (a) $\emptyset \in \mathcal{T}$ ist klar; $X \in \mathcal{T}$ gilt nach Voraussetzung (1).
- (b) folgt unmittelbar aus der Definition von \mathcal{T} .
- (c) Es seien $U, V \in \mathcal{T}$ und $a \in U \cap V$. Da U und V Vereinigungen von Mengen aus \mathcal{B} sind, gibt es $U_a, V_a \in \mathcal{B}$ mit $a \in U_a \cap V_a \subset U \cap V$. Nach Voraussetzung (2) existiert also eine Menge $W_a \in \mathcal{B}$ mit $a \in W_a \subset U_a \cap V_a \subset U \cap V$. Damit gilt analog zum Beweis von Lemma 1.11

$$U \cap V \subset \bigcup_{a \in U \cap V} W_a \subset U \cap V,$$

und damit $U \cap V = \bigcup_{a \in U \cap V} W_a \in \mathcal{T}$. □

Bemerkung 1.15. Beachte, dass die Bedingung (2) aus Satz 1.14 insbesondere dann erfüllt ist, wenn \mathcal{B} abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten ist, also mit $U, V \in \mathcal{B}$ auch stets $U \cap V \in \mathcal{B}$ gilt (sofern diese Menge nicht leer ist): Dann können wir nämlich immer $W = U \cap V$ wählen. In vielen konkreten Beispielen, wie z. B. den folgenden Konstruktionen, ist dies der Fall und vereinfacht die Situation damit noch einmal.

Konstruktion 1.16 (Produkttopologie). Es seien X und Y zwei topologische Räume. Wir betrachten das System

$$\mathcal{B} = \{U \times V : U \subset X \text{ offen}, V \subset Y \text{ offen}\}$$

von Teilmengen von $X \times Y$. Dies erfüllt die Eigenschaften (1) und (2) aus Satz 1.14:

- (a) ist klar, da der gesamte Raum $X \times Y$ bereits eine Menge in \mathcal{B} ist.
- (b) folgt aus Bemerkung 1.15, da für zwei Mengen $U_1 \times V_1$ und $U_2 \times V_2$ in \mathcal{B} ihr Durchschnitt $(U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$ nach Definition 1.1 (c) auch wieder in \mathcal{B} liegt.

Nach Satz 1.14 erzeugt \mathcal{B} also eine Topologie auf $X \times Y$. Sie wird die **Produkttopologie** auf $X \times Y$ genannt und ist die Standardtopologie auf Produkten topologischer Räume. Ihre offenen Mengen sind also genau die Vereinigungen von Mengen der Form $U \times V$, wobei U und V offen in X bzw. Y sind. Natürlich lässt sich diese Konstruktion statt für zwei auch für mehrere Faktoren durchführen.

Aufgabe 1.17. Mit Konstruktion 1.16 haben wir auf \mathbb{R}^n jetzt neben der Standardtopologie noch eine weitere natürliche Topologie eingeführt, nämlich die von \mathbb{R} induzierte Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$. Zeige, dass diese beiden Topologien übereinstimmen, so dass es hier also nicht zu Missverständnissen kommen kann.

Beispiel 1.18 (Sorgenfrey-Topologie). Es sei $\mathcal{B} = \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a < b\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ die Menge aller links abgeschlossenen und rechts offenen Intervalle in \mathbb{R} . Dann erfüllt \mathcal{B} die Voraussetzungen von Satz 1.14:

- (a) ist klar, da bereits die Vereinigung der Intervalle $[n, n+1)$ für $n \in \mathbb{Z}$ gleich \mathbb{R} ist.
- (b) folgt aus Bemerkung 1.15, weil nicht-leere Durchschnitte von zwei links abgeschlossenen und rechts offenen Intervallen wieder von dieser Form sind.

Die damit nach Satz 1.14 von \mathcal{B} auf \mathbb{R} erzeugte Topologie \mathcal{T} wird **Sorgenfrey-Topologie** genannt. Wir werden sie im Folgenden immer mal wieder als nicht-triviales Beispiel einer Topologie auf \mathbb{R} betrachten, die nicht gleich der Standardtopologie ist. In der Tat ist sie feiner als die Standardtopologie:

- Ist $U \subset \mathbb{R}$ offen in der Standardtopologie, so gibt es natürlich zu jedem $a \in U$ ein halboffenes Intervall $[a, a + \varepsilon_a) \subset U$. Die Vereinigung $\bigcup_{a \in U} [a, a + \varepsilon_a)$ ist dann offensichtlich gleich U , und gleichzeitig Sorgenfrey-offen als Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} .
- Das halboffene Intervall hingegen $[0, 1)$ ist Sorgenfrey-offen, aber nicht offen in der Standardtopologie.

Die Sorgenfrey-Topologie ist aber natürlich gröber als die diskrete Topologie, denn die einpunktige Menge $\{0\}$ kann nicht als Vereinigung von Mengen aus \mathcal{B} geschrieben werden.

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir nun noch einige bereits aus den „Grundlagen der Mathematik“ bekannte topologische Konzepte auf die offensichtliche Art auf allgemeine topologische Räume übertragen.

Definition 1.19 (Inneres, Abschluss und Rand). Es seien X ein topologischer Raum, $a \in X$ ein Punkt und $M \subset X$ eine Teilmenge von X .

- (a) Der Punkt a heißt **innerer Punkt** von M , wenn es eine offene Menge U gibt mit $a \in U \subset M$. In diesem Fall nennt man M auch eine **Umgebung** von a . Die Menge aller inneren Punkte von M wird mit $\overset{\circ}{M}$ bezeichnet und das **Innere** von M genannt.
- (b) Der Punkt a heißt **Berührungspunkt** von M , wenn jede offene Menge U mit $a \in U$ einen Punkt aus M enthält. Die Menge aller Berührungspunkte von M wird mit \overline{M} bezeichnet und der **Abschluss** von M genannt.
Ist $\overline{M} = X$, so heißt M **dicht** in X .

- (c) Der Punkt a heißt **Randpunkt** von M , wenn jede offene Menge U mit $a \in U$ sowohl einen Punkt aus M als auch einen aus dem Komplement $X \setminus M$ enthält. Die Menge aller Randpunkte von M wird mit ∂M bezeichnet und der **Rand** von M genannt.

Bemerkung 1.20. In allen drei Teilen der Definition 1.19 kann der Begriff „offene Menge U “ durch „basis-offene Menge U “ ersetzt werden, wenn die Topologie auf X durch eine Basis \mathcal{B} gegeben ist. Wir zeigen dies hier exemplarisch für Teil (a), also die Äquivalenz

$$\text{es gibt } U \subset X \text{ offen mit } a \in U \subset M \Leftrightarrow \text{es gibt } V \in \mathcal{B} \text{ mit } a \in V \subset M.$$

In der Tat ist die Richtung „ \Leftarrow “ offensichtlich, weil jede basis-offene Menge offen ist und wir somit $U = V$ wählen können. Für die Richtung „ \Rightarrow “ schreiben wir die gegebene offene Menge U als Vereinigung basis-offener Mengen aus \mathcal{B} . Da diese basis-offenen Mengen U überdecken, gibt es unter ihnen eine Menge V , die a enthält und für die somit $a \in V \subset M$ gilt.

Da basis-offene Mengen in der Regel eine einfachere Form als allgemeine offene Mengen haben, zeigt diese Bemerkung noch einmal die Nützlichkeit von Basen beim Umgang mit topologischen Räumen. In der Tat werden wir auch noch für einige andere topologische Eigenschaften sehen, dass es genügt, statt beliebiger offener Mengen nur basis-offene Mengen zu betrachten (siehe z. B. Satz 2.4 und Bemerkung 4.2).

Die oben definierten Mengen $\overset{\circ}{M}$, \overline{M} und ∂M erfüllen einige einfache anschauliche Eigenschaften, die mehr oder weniger direkt aus den Definitionen folgen und wörtlich genauso bewiesen werden wie im Fall von metrischen Räumen in den „Grundlagen der Mathematik“ [G2, Lemma 23.40]. Ihr Beweis sei deshalb hier nur der Vollständigkeit halber angegeben (und wurde in der Vorlesung auch nicht vorgeführt).

Lemma 1.21. Für jede Teilmenge M eines topologischen Raumes X gilt:

- (a) $\overset{\circ}{M}$ ist die Vereinigung aller offenen Mengen, die in M enthalten sind, also

$$\overset{\circ}{M} = \bigcup_{U \subset M \text{ offen}} U.$$

Insbesondere ist $\overset{\circ}{M}$ also die größte offene Menge, die in M enthalten ist; und M ist genau dann offen, wenn $\overset{\circ}{M} = M$.

- (b) \overline{M} ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die M enthalten, also

$$\overline{M} = \bigcap_{A \supset M \text{ abgeschlossen}} A.$$

Insbesondere ist \overline{M} also die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält; und M ist genau dann abgeschlossen, wenn $\overline{M} = M$.

- (c) $\overset{\circ}{M} = M \setminus \partial M$.
 (d) $\overline{M} = M \cup \partial M$.
 (e) $\partial M = \overline{M} \setminus \overset{\circ}{M}$. Insbesondere ist ∂M abgeschlossen.

Beweis.

- (a) Nach den Definitionen folgt für alle $a \in X$ sofort

$$a \in \overset{\circ}{M} \Leftrightarrow \text{es gibt ein } U \text{ offen mit } a \in U \subset M \Leftrightarrow a \in \bigcup_{U \subset M \text{ offen}} U,$$

und $\overset{\circ}{M}$ ist nach Definition 1.1 (b) offen.

- (b) zeigt man analog zu (a) durch Übergang zum Komplement: Für alle $a \in X$ gilt nach Definition 1.19 (b)

$$\begin{aligned}
 a \notin \bar{M} &\Leftrightarrow \text{es gibt ein } U \text{ offen mit } a \in U \text{ und } U \subset X \setminus M \\
 &\Leftrightarrow a \in \bigcup_{U \subset X \setminus M \text{ offen}} U \\
 &\Leftrightarrow a \notin \bigcap_{U \subset X \setminus M \text{ offen}} (X \setminus U) \\
 &\Leftrightarrow a \notin \bigcap_{A \supset M \text{ abgeschlossen}} A \quad (\text{mit } A = X \setminus U).
 \end{aligned}$$

Damit gilt die in (b) behauptete Formel, und \bar{M} ist nach Bemerkung 1.3 abgeschlossen.

- (c) Die Bedingung $a \notin \partial M$ bedeutet genau, dass es eine offene Menge U mit $a \in U$ gibt, für die entweder $U \subset M$ oder $U \subset X \setminus M$ ist. Falls $a \in M$ gilt, kann hierbei wegen $a \in U$ natürlich nur die Alternative $U \subset M$ auftreten. Also ist $a \in M \setminus \partial M$ genau dann, wenn es eine offene Menge U mit $a \in U \subset M$ gibt, also wenn $a \in \overset{\circ}{M}$.
- (d) „ \subset “: Ist $a \in \bar{M}$ und $a \notin M$, so enthält jede offene Menge U mit $a \in U$ nicht nur einen Punkt aus M , sondern auch den Punkt $a \in X \setminus M$. Also ist dann $a \in \partial M$.

Die Inklusionen $M \subset \bar{M}$ und $\partial M \subset \bar{M}$ für die Rückrichtung „ \supset “ folgen sofort aus den Definitionen.

- (e) Die Gleichung folgt sofort aus (c) und (d); der Rand ∂M ist dann als Durchschnitt der nach (a) und (b) abgeschlossenen Mengen \bar{M} und $X \setminus \overset{\circ}{M}$ abgeschlossen. \square

Beispiel 1.22. Wir betrachten die Teilmenge $M = [0, 1]$ von $X = \mathbb{R}$. Was der Rand von M in X ist, hängt sehr von der betrachteten Topologie ab:

- (a) Wählen wir auf \mathbb{R} die Standardtopologie, so ist natürlich $\partial M = \{0, 1\}$.
- (b) Wählen wir auf \mathbb{R} die diskrete Topologie, ist also jede Menge offen und abgeschlossen, so gilt $\overset{\circ}{M} = \bar{M} = M$ und damit $\partial M = \bar{M} \setminus \overset{\circ}{M} = \emptyset$ nach Lemma 1.21. In der Tat kann man auch direkt sehen, dass kein Punkt $a \in \mathbb{R}$ ein Randpunkt irgendeiner Teilmenge von \mathbb{R} sein kann, weil $\{a\}$ eine offene Umgebung von a ist, die natürlich nicht gleichzeitig einen Punkt aus der Menge und aus dem Komplement der Menge enthalten kann.
- (c) Wählen wir auf \mathbb{R} dagegen die indiskrete Topologie, so folgt aus den Formeln in Lemma 1.21 (a) und (b) sofort $\overset{\circ}{M} = \emptyset$ und $\bar{M} = \mathbb{R}$ (denn die einzige offene Menge, die in M liegt, ist \emptyset , und die einzige abgeschlossene Menge, die M enthält, ist \mathbb{R}). Damit ist $\partial M = \mathbb{R}$ nach Lemma 1.21 (e).
- (d) Wählen wir auf \mathbb{R} schließlich die Sorgenfrey-Topologie aus Beispiel 1.18, so gibt es zu jedem $a \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 1$ offensichtlich ein $\varepsilon > 0$, so dass $[a, a + \varepsilon)$ entweder ganz in M oder ganz in $X \setminus M$ liegt – keiner dieser Punkte $a \in \mathbb{R}$ kann also ein Randpunkt von M sein. Allerdings ist 1 nach Bemerkung 1.20 ein Randpunkt von M , denn jede basis-offene Menge $[a, b)$, die 1 enthält (also für die $a \leq 1 < b$ gilt), enthält auch einen Punkt größer als 1, der damit nicht mehr in M liegt. Also ist hier $\partial M = \{1\}$.

Man kann an diesen Beispielen übrigens auch eine anschauliche Interpretation ablesen, warum Topologien mit mehr bzw. weniger offenen Mengen feiner bzw. gröber heißen (siehe Definition 1.1): Bilden wir von M z. B. in der grössten möglichen Topologie, der indiskreten Topologie in (c), das Innere bzw. den Abschluss, d. h. „nehmen wir lediglich die Randpunkte weg oder mit hinzu“, so verhält sich diese Topologie in der Tat sehr „grob“ und man erhält sofort die leere Menge bzw. den ganzen Raum. Die diskrete Topologie in (b) ist hingegen so „fein“, dass beim Weg- oder Hinzunehmen der Randpunkte überhaupt nichts passiert.

Aufgabe 1.23. Man beweise oder widerlege: Für zwei Teilmengen A und B eines topologischen Raumes gilt

- (a) $(A \cup B)^\circ \subset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$;
- (b) $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$;
- (c) $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$.

Untersuche jeweils auch die umgekehrten Inklusionen bzw. die Gleichheit!

Aufgabe 1.24. Man zeige:

- (a) Ist X ein metrischer Raum, der eine dichte abzählbare Teilmenge besitzt, so gibt es eine abzählbare Basis der Topologie von X .
- (b) Die Sorgenfrey-Topologie auf \mathbb{R} ist nicht metrisierbar (d. h. es gibt keine Metrik auf \mathbb{R} , die genau die Sorgenfrey-Topologie erzeugt).

Aufgabe 1.25 (Ein topologisches Spiel). Es sei M eine Teilmenge eines topologischen Raumes X . Ausgehend von M dürfen wir jetzt neue Teilmengen von X konstruieren, indem wir von M oder bereits vorher konstruierten Mengen entweder das Komplement oder den Abschluss bilden. Starten wir z. B. mit $X = \mathbb{R}$ (mit der Standardtopologie) und $M = [0, 1]$, so ist das Komplement von M gleich $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, von dieser Menge der Abschluss gleich $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$, und davon wiederum das Komplement gleich $(0, 1)$. Man überprüft schnell, dass weitere Komplemente oder Abschlüsse dieser vier konstruierten Mengen nicht mehr zu neuen Mengen führen. Ausgehend von M konnten wir hier also insgesamt vier verschiedene Mengen erzeugen.

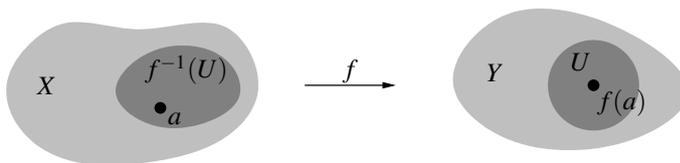
Das Ziel ist es nun, eine Startmenge M zu finden, aus der man durch Komplemente und Abschlüsse *möglichst viele* verschiedene Teilmengen von \mathbb{R} bilden kann. Durch geschickte Wahl von M kann man deutlich mehr als vier Mengen bekommen – was ist das Maximum?

2. Stetige Abbildungen

Nachdem wir im letzten Kapitel topologische Räume eingeführt haben, wollen wir nun Abbildungen zwischen solchen Räumen untersuchen. Wie schon in der Einleitung erwähnt sind in der Topologie vor allem die *stetigen* Abbildungen wichtig – in der Tat war die Definition eines topologischen Raumes ja gerade so motiviert, dass man damit das Konzept von stetigen Abbildungen formulieren kann. Zur Definition stetiger Abbildungen verwenden wir die folgende Bedingung, die sich in der Sprache der topologischen Räume formulieren lässt und von der wir bereits wissen, dass sie in metrischen Räumen zur ε - δ -Stetigkeit äquivalent ist [G2, Lemma 24.16]:

Definition 2.1 (Stetigkeit). Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen.

- (a) f heißt **stetig** in einem Punkt $a \in X$, wenn zu jeder Umgebung U von $f(a)$ in Y das Urbild $f^{-1}(U)$ eine Umgebung von a in X ist.
- (b) f heißt **stetig**, wenn f in jedem Punkt $a \in X$ stetig ist.



Bemerkung 2.2.

- (a) In der Tat genügt es für die Stetigkeit von f in a , die Bedingung aus Definition 2.1 (a) für jede *offene* Umgebung U , bzw. im Fall einer durch eine Basis gegebenen Topologie für jede *basis-offene* Umgebung von $f(a)$ nachzuprüfen: Ist V dann nämlich eine beliebige Umgebung von $f(a)$, so enthält diese nach Definition 1.19 (a) bzw. Bemerkung 1.20 eine (basis-)offene Umgebung U von $f(a)$. Wissen wir nun, dass $f^{-1}(U)$ dann eine Umgebung von a ist, so ist $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(U)$ damit natürlich erst recht eine Umgebung von a .
- (b) Ein Konzept der *gleichmäßigen Stetigkeit* wie in [G2, Definition 8.34 (b) und Definition 24.24 (a)] lässt sich für Abbildungen zwischen allgemeinen topologischen Räumen nicht definieren, da es keine Möglichkeit gibt, Umgebungen von verschiedenen Punkten „größenmäßig miteinander zu vergleichen“.

Bemerkung 2.3 (Stetigkeit in metrischen Räumen [G2, Lemma 24.16]). Sind X und Y metrische Räume, so ist die Definition 2.1 (a) der Stetigkeit einer Abbildung $f: X \rightarrow Y$ in einem Punkt $a \in X$ wie oben schon erwähnt äquivalent zum gewohnten ε - δ -Kriterium [G2, Lemma 24.16]. Der Vollständigkeit halber sei hier noch einmal ein Beweis dafür gegeben: Zunächst einmal sieht man mit dem gleichen Argument wie in Bemerkung 2.2, dass es genügt, die Bedingung aus Definition 2.1 (a) für ε -Kugeln $U_\varepsilon(f(a))$ um $f(a)$ zu zeigen. Die Bedingung besagt dann aber gerade, dass das Urbild $f^{-1}(U_\varepsilon(f(a)))$ eine Umgebung von a ist, also äquivalent dazu eine δ -Umgebung $U_\delta(a)$ von a enthält. Mit anderen Worten ist die Bedingung genau

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} : U_\delta(a) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(a))),$$

was genau das ε - δ -Kriterium ist.

Möchte man von einer Abbildung nicht unbedingt genau wissen, in welchen Punkten sie stetig ist und in welchen nicht, sondern nur, ob sie in *allen* Punkten stetig ist, so gibt es hierfür ein Kriterium, das oft viel einfacher anzuwenden ist als Definition 2.1. Auch dieses Kriterium, das wir im folgenden Satz beweisen wollen, ist euch vermutlich zumindest zum Teil schon für den Fall von Abbildungen zwischen metrischen Räumen aus den Grundlagen der Mathematik bekannt [G2, Satz 24.17].

Satz 2.4 (Kriterien für Stetigkeit). Für eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (a) f ist stetig.
- (b) Für alle offenen Teilmengen $U \subset Y$ ist $f^{-1}(U)$ offen in X
(„Urbilder offener Mengen sind offen“).
- (c) Für alle Basen \mathcal{B} der Topologie auf Y gilt: Für alle $U \in \mathcal{B}$ ist $f^{-1}(U)$ offen in X
(„Urbilder basis-offener Mengen sind offen“).
- (d) Es gibt eine Basis \mathcal{B} der Topologie auf Y , für die gilt: Für alle $U \in \mathcal{B}$ ist $f^{-1}(U)$ offen in X .
- (e) Für alle abgeschlossenen Teilmengen $A \subset Y$ ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X
(„Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen“).

Beweis. „(a) \Rightarrow (b)“: Es seien f stetig, $U \subset Y$ offen und $a \in f^{-1}(U)$, also $f(a) \in U$. Dann ist U eine Umgebung von $f(a)$, und damit ist $f^{-1}(U)$ nach Definition 2.1 (a) eine Umgebung von a . Es gibt also eine offene Menge V_a in X mit $a \in V_a \subset f^{-1}(U)$. Vereinigen wir nun diese Mengen V_a für alle $a \in f^{-1}(U)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &\subset \bigcup_{a \in f^{-1}(U)} V_a \quad (\text{denn } a \in V_a \text{ für alle } a \in f^{-1}(U)) \\ &\subset f^{-1}(U) \quad (\text{wegen } V_a \subset f^{-1}(U)). \end{aligned}$$

Also gilt hier die Gleichheit, und $f^{-1}(U)$ ist als Vereinigung offener Mengen offen.

„(b) \Rightarrow (c)“ ist trivial, da basis-offene Mengen immer auch offen sind.

„(c) \Rightarrow (d)“ ist ebenfalls trivial (wähle z. B. für \mathcal{B} die Basis aller offenen Mengen).

„(d) \Rightarrow (a)“: Es seien $a \in X$ beliebig und U eine Umgebung von $f(a)$ in Y . Dann gibt es nach Bemerkung 1.20 eine basis-offene Menge V in Y mit $f(a) \in V \subset U$. Da Urbilder basis-offener Mengen unter f nach (d) offen sind, ist $f^{-1}(V)$ nun offen in X . Wegen $a \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(U)$ ist $f^{-1}(U)$ damit eine Umgebung von a in X . Also ist f stetig in a .

„(b) \Leftrightarrow (e)“: Dies ergibt sich sofort durch Übergang zum Komplement, da

$$f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$$

für jede (offene) Teilmenge U von Y gilt. □

Beispiel 2.5. Aufgrund von Bemerkung 2.3 übertragen sich natürlich alle Beispiele und Gegenbeispiele für stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen, die ihr aus den „Grundlagen der Mathematik“ kennt, sofort auf unsere neue Definition. Hier sind noch ein paar weitere Beispiele:

- (a) Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen bleibt stetig, wenn man die Topologie auf X feiner oder die auf Y gröber macht – denn dann ist die neue Stetigkeitsbedingung aus Satz 2.4 (b) ja schwächer als die alte.

Im Extremfall, wenn X die diskrete (also feinstmögliche) oder Y die indiskrete (also gröbstmögliche) Topologie hat, ist sogar jede Abbildung $f: X \rightarrow Y$ stetig, da die Bedingung aus Satz 2.4 (b) dann immer erfüllt ist.

- (b) Eine konstante Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen beliebigen topologischen Räumen ist immer stetig, denn Urbilder beliebiger Teilmengen von Y können nur \emptyset und X sein und sind damit nach Definition 1.1 (a) offen.
- (c) Es sei Y eine Teilmenge eines topologischen Raumes X . Wie üblich fassen wir Y mit der Teilraumtopologie aus Konstruktion 1.7 selbst wieder als topologischen Raum auf. Wir betrachten die Inklusionsabbildung

$$i: Y \rightarrow X, a \mapsto a.$$

Ist $U \subset X$ offen, so ist natürlich $i^{-1}(U) = Y \cap U$, und diese Menge ist nach Definition der Teilraumtopologie offen in Y . Also ist i nach Satz 2.4 „(b) \Rightarrow (a)“ stetig. In der Tat sind *genau* die Mengen dieser Form offen in Y – was man auch so formulieren kann, dass die Teilraumtopologie die *größte* Topologie auf Y ist, für die die Inklusionsabbildung $i: Y \rightarrow X$ stetig ist.

- (d) Sind $f: X \rightarrow Y$ und $g: Y \rightarrow Z$ stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen, so ist auch die Verkettung $g \circ f: X \rightarrow Z$ stetig – dies ergibt sich z. B. sofort aus dem Stetigkeitskriterium aus Satz 2.4 (b).

Aufgabe 2.6. Es sei \mathcal{T} die Topologie zur Postamtmetrik auf \mathbb{R}^2 aus Beispiel 1.5 (a).

- (a) Zeige, dass für $x \in \mathbb{R}^2$ die einpunktige Menge $\{x\}$ genau dann offen bzgl. \mathcal{T} ist, wenn $x \neq 0$ ist.
 (b) Bestimme eine möglichst einfache Basis der Topologie \mathcal{T} .
 (c) In welchen Punkten ist die Abbildung $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 1, x_2)$ stetig?

Aufgabe 2.7 (Andere Stetigkeitsbegriffe aus der Analysis). Es seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$.

- (a) Die Funktion f heißt in a *rechtsseitig stetig*, wenn $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \geq a}} f(x) = f(a)$ gilt.

Zeige, dass diese Bedingung äquivalent ist zur Stetigkeit in a als Abbildung $f: (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$, wobei \mathcal{T} die Sorgenfrey-Topologie ist und der Zielraum die Standardtopologie hat.

- (b) Die Funktion f heißt in a *halbstetig von oben*, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \forall x \in \mathbb{R}: |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) - f(a) < \varepsilon.$$

Konstruiere eine Topologie \mathcal{T} auf \mathbb{R} , so dass diese Bedingung äquivalent ist zur Stetigkeit in a als Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$, wobei der Startraum die Standardtopologie hat.

Was bedeutet diese Bedingung anschaulich?

Aufgabe 2.8. Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Man zeige:

- (a) Sind U_1, \dots, U_n offene Mengen in X mit $U_1 \cup \dots \cup U_n = X$ und ist $f|_{U_i}$ stetig für alle i , so ist f stetig.
 (b) Sind A_1, \dots, A_n abgeschlossene Mengen in X mit $A_1 \cup \dots \cup A_n = X$ und ist $f|_{A_i}$ stetig für alle i , so ist f stetig.

Gelten diese Aussagen auch noch für Überdeckungen von X durch unendlich viele Teilmengen?

Aufgabe 2.9 (Stetigkeit \neq Folgenstetigkeit). In dieser Aufgabe wollen wir sehen, dass man die Stetigkeit von Abbildungen zwischen topologischen Räumen im Allgemeinen *nicht* mit Hilfe von Folgen überprüfen kann – im Gegensatz zum Fall von metrischen Räumen [G2, Bemerkung 24.5 (b)]. Aus diesem Grund spielen Folgen in der Topologie auch eine viel geringere Rolle als in der Analysis. (Man bräuchte hier stattdessen die Begriffe von sogenannten *Netzen* oder *Filtern*, die man sich als geeignet verallgemeinerte Folgenbegriffe vorstellen kann – wir wollen darauf in dieser Vorlesung jedoch nicht weiter eingehen.)

- (a) Man zeige: In der Komplement-abzählbar-Topologie aus Beispiel 1.5 (c) konvergiert eine Folge $(x_n)_n$ in X genau dann gegen ein $a \in X$, wenn $x_n = a$ für fast alle n gilt. (Wie ist eigentlich Folgenkonvergenz in einem topologischen Raum definiert?)
 (b) Gib ein Beispiel für eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen an, die in einem Punkt $a \in X$ zwar das Folgenkriterium

$$\text{für jede Folge } (x_n)_n \text{ in } X \text{ mit } x_n \rightarrow a \text{ gilt } f(x_n) \rightarrow f(a)$$

erfüllt, die aber dennoch *nicht* stetig in a ist.

Warum genau kann der für metrische Räume bekannte Beweis des Folgenkriteriums für Stetigkeit nicht auf beliebige topologische Räume verallgemeinert werden?

Ein weiteres interessantes und wichtiges Beispiel zu stetigen Abbildungen ergibt sich bei der Untersuchung der Produkttopologie aus Konstruktion 1.16. Es ist die direkte Übertragung der aus den „Grundlagen der Mathematik“ bekannten Aussage, dass die Stetigkeit einer Abbildung von einem metrischen Raum nach \mathbb{R}^n komponentenweise im Zielraum überprüft werden kann [G2, Lemma 24.7]. Wir formulieren es hier als eigenes Lemma.

Lemma 2.10 (Stetige Abbildungen in Produkte). *Es seien X und Y topologische Räume sowie $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ und $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$ die Projektionsabbildungen. Dann gilt:*

- (a) π_X und π_Y sind stetig.
- (b) Eine Abbildung $f: Z \rightarrow X \times Y$ von einem topologischen Raum Z in das Produkt $X \times Y$ ist genau dann stetig, wenn die beiden Komponentenabbildungen $f_X := \pi_X \circ f: Z \rightarrow X$ und $f_Y := \pi_Y \circ f: Z \rightarrow Y$ stetig sind.

Beweis.

- (a) Ist $U \subset X$ offen, so ist das Urbild $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$ nach Definition der Produkttopologie offen in $X \times Y$. Also ist π_X (und analog auch π_Y) stetig nach Satz 2.4 (b).
- (b) „ \Rightarrow “: Ist f stetig, so sind nach (a) natürlich auch f_X und f_Y als Verkettungen stetiger Abbildungen stetig (siehe Beispiel 2.5 (d)).

„ \Leftarrow “: Es seien f_X und f_Y stetig. Nach Satz 2.4 „(d) \Rightarrow (a)“ genügt es zu zeigen, dass Urbilder unter f von Mengen der Form $U \times V$ für offene Mengen $U \subset X$ und $V \subset Y$ wieder offen sind. In der Tat ist nun

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= \{z \in Z : f(z) \in U \times V\} = \{z \in Z : f_X(z) \in U \text{ und } f_Y(z) \in V\} \\ &= f_X^{-1}(U) \cap f_Y^{-1}(V) \end{aligned}$$

nach Satz 2.4 (b) offen, da f_X und f_Y als stetig vorausgesetzt wurden. \square

Bemerkung 2.11 (Initialtopologien). Man kann leicht überprüfen, dass die Eigenschaft aus Lemma 2.10 (b) die Produkttopologie eindeutig charakterisiert, d. h. dass die Produkttopologie die einzige Topologie auf $X \times Y$ ist, mit der diese Aussage richtig ist. Man nennt dies daher die *universelle Eigenschaft der Produkttopologie*. Analog rechnet man leicht nach, dass die Produkttopologie die größte Topologie auf $X \times Y$ ist, bezüglich der die Aussage aus Lemma 2.10 (a) gilt.

In der Tat ist dies ein spezieller Fall einer sogenannten *Initialtopologie*: Hat man eine Familie topologischer Räume $(X_i)_{i \in J}$, eine Menge Y und Abbildungen $\pi_i: Y \rightarrow X_i$ für alle $i \in J$ gegeben, so definieren diese Daten eine sogenannte Initialtopologie auf Y als die die größte Topologie auf Y , bezüglich der alle π_i stetig sind, oder alternativ als die eindeutig bestimmte Topologie auf Y , so dass eine Abbildung $f: Z \rightarrow Y$ von einem beliebigen topologischen Raum Z genau dann stetig ist, wenn alle Verkettungen $\pi_i \circ f: Z \rightarrow X_i$ es sind.

Ein weiteres Beispiel einer Initialtopologie, das wir bereits gesehen haben, ist die Teilraumtopologie (siehe Beispiel 2.5 (c)). In diesem Fall gibt es nur eine Abbildung $\pi: Y \rightarrow X$, nämlich die Inklusion einer Teilmenge Y in einem topologischen Raum X .

Wir werden diese allgemeinen Initialtopologien in dieser Vorlesung aber nicht weiter untersuchen. Es gibt übrigens auch eine entsprechende „duale“ Version mit „umgekehrten Pfeilrichtungen“, die sogenannten Finaltopologien (siehe Bemerkung 5.7).

Beispiel 2.12 (Summen und Produkte stetiger Abbildungen nach \mathbb{R}). Es seien $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Abbildungen von einem beliebigen topologischen Raum X in die reellen Zahlen mit der Standardtopologie. Dann sind auch

$$f + g: X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad f \cdot g: X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

stetig: Die Abbildung $X \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (f(x), g(x))$ ist stetig nach Lemma 2.10 (b), und die beiden Abbildungen $f + g$ und $f \cdot g$ ergeben sich daraus durch Verkettung mit den bekanntlich stetigen Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ bzw. $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$.

Wir werden dies im Folgenden oft benutzen, ohne jedes Mal explizit darauf hinzuweisen.

Von besonderer Bedeutung sind die Abbildungen, die nicht nur stetig sind, sondern auch noch eine stetige Umkehrabbildung besitzen. Sie haben einen besonderen (und nicht besonders schönen) Namen:

Definition 2.13 (Homöomorphismen). Es seien X und Y topologische Räume.

- (a) Eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt **Homöomorphismus**, wenn sie stetig und bijektiv ist, und die Umkehrabbildung f^{-1} ebenfalls stetig ist.
- (b) Die Räume X und Y heißen **homöomorph** (in Zeichen: $X \cong Y$), wenn es zwischen ihnen einen Homöomorphismus $f: X \rightarrow Y$ gibt.

02

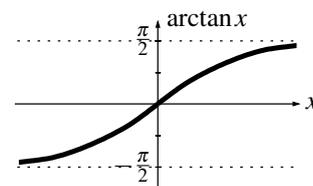
Bemerkung 2.14.

- (a) Nach dem Stetigkeitskriterium aus Satz 2.4 (b) ist eine Abbildung $f: X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen genau dann ein Homöomorphismus, wenn sie bijektiv ist und unter f sowohl Urbilder als auch Bilder (die man ja dann als Urbilder von f^{-1} auffassen kann) offener Mengen wieder offen sind. Anders ausgedrückt ist f genau dann ein Homöomorphismus, wenn f bijektiv ist und die offenen Mengen von X und Y eins zu eins aufeinander abbildet. Da die offenen Mengen ja aber gerade das sind, was eine Topologie definiert, heißt das also, dass zwei topologische Räume genau dann homöomorph sind, wenn sie topologisch ununterscheidbar sind. Homöomorphe Räume werden daher auch oft als *topologisch isomorph* oder *topologisch äquivalent*, Homöomorphismen als *topologische Isomorphismen* bezeichnet. Sie spielen in der Topologie dieselbe Rolle wie z. B. in der Algebra die Isomorphismen von Gruppen oder Vektorräumen.
- (b) In der Definition eines Homöomorphismus ist die Bedingung, dass f^{-1} ebenfalls stetig ist, nicht überflüssig – im Gegensatz z. B. zur Theorie von Vektorräumen, wo die Umkehrabbildung eines bijektiven Homomorphismus ja stets automatisch wieder ein Homomorphismus ist. Ein sehr einfaches Beispiel hierfür ist die identische Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$, wenn wir den Startraum mit der diskreten und den Zielraum mit der indiskreten Topologie versehen: Natürlich ist f bijektiv und nach Beispiel 2.5 (a) stetig, aber da sich die offenen Mengen im Start- und Zielraum nicht entsprechen, ist f kein Homöomorphismus.

Wir werden in Folgerung 4.14 allerdings noch ein einfaches hinreichendes Kriterium dafür kennenlernen, wann eine stetige bijektive Abbildung bereits ein Homöomorphismus ist.

Beispiel 2.15 (Beispiele homöomorpher Räume).

- (a) Die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), x \mapsto \arctan x$ wie im Bild rechts ist bekanntlich bijektiv und stetig (in der Standardtopologie), genau wie ihre Umkehrabbildung $f^{-1}: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan x$. Also ist f ein Homöomorphismus, d. h. \mathbb{R} ist (mit der Standardtopologie) topologisch äquivalent zum offenen Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ – und analog natürlich auch zu jedem anderen offenen Intervall.

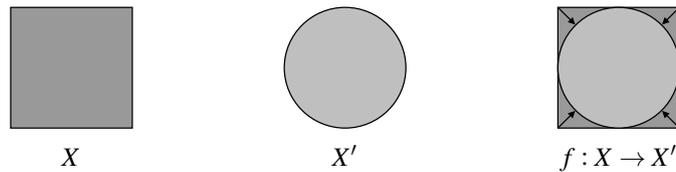


Wir schließen daraus, dass die Topologie in diesem Sinne nicht zwischen „unterschiedlich großen“ Räumen unterscheiden kann, auch nicht zwischen solchen „mit endlicher und unendlicher Ausdehnung“.

- (b) Es seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf \mathbb{R}^n sowie

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} \quad \text{und} \quad X' = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|' \leq 1\}$$

die zugehörigen Einheitskugeln [G2, Definition 23.1]. Im Bild unten ist dies für die Maximumnorm $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ und die euklidische Norm $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_2$ in der Ebene dargestellt, so dass die beiden Einheitskugeln ein (abgeschlossenes) Quadrat bzw. ein (abgeschlossener) Kreis sind [G2, Beispiel 23.3].



Wir betrachten nun die Abbildung

$$f: X \rightarrow X', x \mapsto \begin{cases} \frac{\|x\|}{\|x\|'} \cdot x & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

die jeden Vektor um einen variablen Faktor streckt. Sie erfüllt offensichtlich $\|f(x)\|' = \|x\|$ für alle $x \in X$. Daraus folgt sofort:

- Aus $x \in X$, also $\|x\| \leq 1$, ergibt sich auch $\|f(x)\|' \leq 1$ und damit $f(x) \in X'$. Also bildet f wirklich wie behauptet X auf X' ab.
- Die Abbildung f ist stetig: Bekanntlich können wir dies mit dem ε - δ -Kriterium in einer beliebigen Norm überprüfen, da alle Normen die Standardtopologie erzeugen [G2, Bemerkung 24.5 (b)]. Insbesondere können wir im Start- und Zielraum auch unterschiedliche Normen wählen – in diesem Fall $\|\cdot\|$ im Startraum und $\|\cdot\|'$ im Zielraum. Dann besagt die Gleichung $\|f(x)\|' = \|x\|$ aber gerade $\|f(x)\|' < \varepsilon$ für alle $x \in X$ mit $\|x\| < \varepsilon$, womit f in 0 stetig ist. Die Stetigkeit in den anderen Punkten folgt natürlich einfach daraus, dass Normen stetig sind [G2, Beispiel 24.3] und f dort somit aus stetigen Funktionen zusammengesetzt ist.

Da f offensichtlich bijektiv ist mit Umkehrabbildung $f^{-1}: x \mapsto \frac{\|x\|'}{\|x\|} \cdot x$, ist f^{-1} mit dem gleichen Argument ebenfalls stetig. Also ist f ein Homöomorphismus, die beiden Einheitskugeln X und X' sind (in der Standardtopologie) homöomorph.

Wir können dieses Ergebnis so interpretieren, dass die Topologie „keine Formen oder Ecken sieht“: Ein Quadrat ist z. B. topologisch äquivalent zu einem Kreis.

Aufgabe 2.16. Es seien D ein Dreieck und K ein (abgeschlossener) Kreis in \mathbb{R}^2 mit der Standardtopologie. Zeige, dass D und K homöomorph sind.

Beispiel 2.17 (Beispiele nicht-homöomorpher Räume).

- Zwischen \mathbb{Q} und \mathbb{Z} gibt es zwar bijektive Abbildungen (da beides abzählbar unendliche Mengen sind); als Teilmengen von \mathbb{R} mit der Teilraumtopologie betrachtet sind sie jedoch nicht homöomorph, da \mathbb{Z} die diskrete Topologie besitzt und \mathbb{Q} nicht.
- Man kann zeigen, dass die Topologie „Dimensionen unterscheiden kann“: So sind z. B. die Räume \mathbb{R}^n für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ alle topologisch verschieden, also paarweise nicht zueinander homöomorph. Dies ist jedoch schon ein schwieriges Resultat der algebraischen Topologie, von dem wir in dieser Vorlesung in den Beispielen 3.9 (a) und 8.18 nur die Spezialfälle beweisen können, dass \mathbb{R}^1 und \mathbb{R}^2 nicht zu den anderen \mathbb{R}^n homöomorph sind. Die Situation ist dabei deutlich komplizierter als man zunächst annehmen würde: Dass z. B. \mathbb{R}^1 nicht homöomorph zu \mathbb{R}^2 ist, liegt nicht etwa daran, dass \mathbb{R}^2 „zu groß“ ist, um mit einer stetigen Abbildung durch \mathbb{R}^1 ausgefüllt zu werden. Es gibt nämlich durchaus stetige und surjektive Abbildungen von \mathbb{R}^1 nach \mathbb{R}^2 , wie wir gleich in Satz 2.18 und Aufgabe 2.19 (b) sehen werden. In der Tat macht die Existenz derartig „wilder“ stetiger Abbildungen einige Beweise in der Topologie deutlich schwieriger, als man sich das wünschen würde.

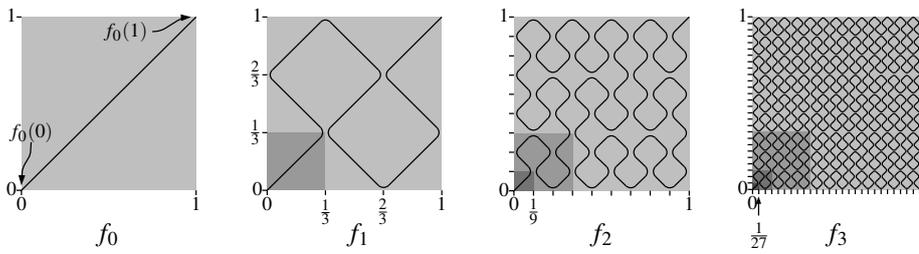
Satz 2.18 (Peano-Kurve). *Es gibt eine stetige und surjektive Abbildung von $I^1 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ nach $I^2 = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Man bezeichnet eine solche Abbildung, also eine „flächenfüllende Kurve“, als Peano-Kurve.*

Beweisskizze. Da die Peano-Kurven für uns eigentlich nur als „abschreckendes Beispiel“ dienen, werden wir den Beweis dieses Satzes hier nur skizzieren, so dass man die Idee hinter der Konstruktion erkennen kann. Die Details zu diesem Beweis könnt ihr in [G2, Satz 24.43] finden, ein alternativer Beweis ergibt sich später mit den Methoden dieser Vorlesung in Aufgabe 4.28 (c).

Wir konstruieren die gesuchte stetige surjektive Funktion $f: I^1 \rightarrow I^2$ als Grenzwert einer rekursiv definierten Funktionenfolge (f_n) mit $f_n: I^1 \rightarrow I^2$. Dabei ist f_0 einfach die Gerade

$$f_0: I^1 \rightarrow I^2, t \mapsto (t, t),$$

die das Einheitsquadrat mit konstanter Geschwindigkeit von links unten nach rechts oben durchläuft. Für die nächste Funktion f_1 teilen wir I^2 in 9 gleich große Teilquadrate entlang der horizontalen und vertikalen Linien bei $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$, und durchlaufen nun diese 9 Teilquadrate der Reihe nach entlang ihrer Diagonalen wie im Bild unten dargestellt. Die Abbildung f_1 besteht also aus 9 Geradenstücken, die alle mit gleicher Geschwindigkeit durchlaufen werden – ihr Bild unten ist an den Ecken nur deswegen abgerundet eingezeichnet, damit den Verlauf besser erkennen kann. Beachte, dass die zurückgelegte Strecke von f_1 dreimal so lang ist wie bei f_0 und der Weg daher mit dreifacher Geschwindigkeit durchlaufen wird.



Die nächste Abbildung f_2 entsteht nun aus f_1 , indem wir wie im Bild oben jedes der 9 Geradenstücke von f_1 (z. B. das in dem dunkel eingezeichneten Teilquadrat) durch einen Weg ersetzen, der selbst wieder wie f_1 aussieht. Entsprechend ersetzen wir dann jedes der Geradenstücke von f_2 durch einen Weg wie f_1 , um f_3 zu erhalten. Setzen wir dieses Verfahren fort, so erhalten wir eine Folge von Abbildungen $f_n: I^1 \rightarrow I^2$.

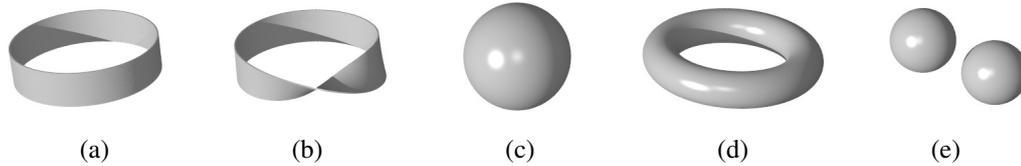
Man kann nun zeigen, dass der Grenzwert $f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$ für alle $t \in I^1$ existiert und die so konstruierte Abbildung $f: I^1 \rightarrow I^2$ stetig und surjektiv ist [G2, Satz 24.43]. \square

Aufgabe 2.19. Konstruiere eine stetige surjektive Abbildung ...

- (a) von I^1 nach I^3 ;
- (b) von \mathbb{R} nach \mathbb{R}^2 .

Bemerkung 2.20. Da homöomorphe Räume als topologisch gleichwertig anzusehen sind, ist es eines der wichtigsten Probleme der Topologie herauszufinden, ob zwei gegebene Räume X und Y homöomorph sind oder nicht. Sind die Räume homöomorph, so wird man dies in der Regel natürlich dadurch beweisen, dass man einen Homöomorphismus $f: X \rightarrow Y$ konkret angibt – so wie wir das in Beispiel 2.15 getan haben. Wie aber zeigt man, dass zwei Räume *nicht* homöomorph sind, also dass es *keinen* Homöomorphismus zwischen ihnen geben kann? Die Idee ist hierbei, topologische Eigenschaften zu suchen (also solche, die unter Homöomorphismen unverändert bleiben), die bei den beiden Räumen verschieden sind. Was für Eigenschaften von Räumen sind also derartige topologische Eigenschaften? Wir haben in Beispiel 2.15 schon gesehen, dass die Größe und eventuelle „Ecken“ des Raumes nicht dazu gehören.

Wir betrachten dazu einmal die unten abgebildeten fünf topologischen Räume (als Teilräume von \mathbb{R}^3 mit der Standardtopologie aufgefasst). Sie sind alle als „zweidimensionale Objekte“ zu verstehen, es handelt sich also jeweils nur um die Oberfläche der betrachteten Figuren.



Diese Räume sind in der Tat alle nicht homöomorph zueinander. Auch wenn wir dies momentan noch nicht exakt beweisen können, sind die topologischen Eigenschaften, die bei diesen Räumen verschieden sind, anschaulich leicht einzusehen: Die beiden Bänder (a) und (b) haben im Gegensatz zu den anderen drei Räumen eine „Berandung“, und diese Berandung besteht beim gewöhnlichen Band (a) aus zwei unzusammenhängenden Kreislinien, während sie beim Möbiusband (b) aus nur einer Kreislinie besteht (siehe auch Beispiel 5.9 (b)). Die Vereinigung (e) von zwei Kugeln ist im Gegensatz zu den anderen Räumen unzusammenhängend, und der Torus (d) hat im Gegensatz zur Kugel (c) ein „Loch“.

Wir werden im Rest dieses Skripts noch viele derartige topologische Eigenschaften kennen lernen und auch mathematisch exakt formulieren. Im nächsten Kapitel beginnen wir dabei mit dem Begriff des Zusammenhangs, den wir gerade eben bei der Unterscheidung der im Bild oben dargestellten Räume ja auch schon verwendet haben.

3. Zusammenhang

Eine der anschaulichsten Eigenschaften eines topologischen Raumes ist wahrscheinlich, ob er „zusammenhängend“ ist oder aus mehreren Teilen besteht. Wir wollen dieses Konzept des Zusammenhangs nun mathematisch exakt einführen. Es stellt sich heraus, dass es zwei ganz verschiedene Arten gibt, es zu definieren.

Definition 3.1 (Wegzusammenhängende und zusammenhängende Räume). Es sei X ein topologischer Raum.

- (a) X heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu jeder Wahl von zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ gibt (wobei das abgeschlossene reelle Intervall $[a, b]$ mit der Standardtopologie versehen ist). Eine solche Abbildung nennt man einen **Weg** von x nach y .



- (b) X heißt **zusammenhängend**, wenn man X *nicht* als disjunkte Vereinigung $X = U \cup V$ von zwei nicht-leeren offenen Teilmengen $U, V \subset X$ schreiben kann.

Oft werden wir auch sagen, dass eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X wegzusammenhängend bzw. zusammenhängend ist. Dies ist dann natürlich so zu verstehen, dass der topologische Raum A mit der Teilraumtopologie (siehe Konstruktion 1.7) die entsprechende Eigenschaft hat.

Bemerkung 3.2.

- (a) Das Konzept des Wegzusammenhangs erlaubt eine naheliegende Verfeinerung: Auf einem topologischen Raum X ist die Relation

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es gibt einen Weg in } X \text{ von } x \text{ nach } y$$

offensichtlich eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen dieser Relation nennt man **Wegzusammenhangskomponenten**. Mit dieser Definition ist der Raum X also genau dann wegzusammenhängend, wenn er genau eine Wegzusammenhangskomponente besitzt (die dann ganz X ist).

- (b) Ist X in Definition 3.1 (b) die disjunkte Vereinigung von zwei Mengen U und V , so ist natürlich $V = X \setminus U$. Die Bedingung, dass U und V offen sind, ist also äquivalent dazu, dass U gleichzeitig offen und abgeschlossen ist. Wir können Definition 3.1 (b) damit auch so umformulieren: Ein topologischer Raum X heißt zusammenhängend, wenn die leere Menge \emptyset und der ganze Raum X die einzigen Teilmengen von X sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Die Idee hinter der Definition 3.1 (a) eines wegzusammenhängenden Raumes ist natürlich sofort einleuchtend und vermutlich auch schon aus den „Grundlagen der Mathematik“ bekannt [G2, Definition 24.20]. Sie wirkt aus topologischer Sicht jedoch recht unnatürlich, da sie die Standardtopologie von reellen Intervallen, also topologische Eigenschaften eines willkürlich gewählten Beispielraums benutzt. Diesen Nachteil hat die Definition 3.1 (b) des Zusammenhangs nicht – dafür ist bei ihr aber anschaulich zunächst einmal überhaupt nicht klar, wieso die Existenz von gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Teilmengen etwas damit zu tun haben soll, ob ein Raum „aus mehreren Teilen besteht“. Wir wollen die beiden eingeführten Zusammenhangsbegriffe daher zunächst anhand von ein paar Beispielen untersuchen.

Beispiel 3.3.

- (a) Ein abgeschlossenes Intervall $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ (mit der Standardtopologie) ist natürlich wegzusammenhängend, da sich zwei beliebige Punkte $x, y \in [a, b]$ immer durch einen Weg miteinander verbinden lassen, z. B. mit $\gamma: [0, 1] \rightarrow [a, b]$, $\gamma(t) = x + t(y - x)$.

In der Tat ist $[a, b]$ auch zusammenhängend: Gäbe es nämlich eine Darstellung $[a, b] = U \cup V$ mit disjunkten und in $[a, b]$ offenen Teilmengen U und V , so wäre die Abbildung

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \in U, \\ 1 & \text{für } x \in V \end{cases}$$

wohldefiniert und nach Satz 2.4 (b) stetig – im Widerspruch zum Zwischenwertsatz [G2, Satz 8.21].

Andere Intervalle in \mathbb{R} (offene, halboffene, uneigentliche) sind natürlich mit denselben Argumenten ebenfalls sowohl wegzusammenhängend als auch zusammenhängend.

- (b) Die rationalen Zahlen $X = \mathbb{Q}$ sind nicht wegzusammenhängend: Sind $a, b \in \mathbb{Q}$ verschieden, so wäre ein Weg von a nach b in \mathbb{Q} auch ein Weg von a nach b in \mathbb{R} und müsste damit nach dem Zwischenwertsatz [G2, Satz 8.21] auch alle irrationalen Zahlen zwischen a und b treffen – was natürlich ein Widerspruch ist. Damit ist jeder Punkt von X seine eigene Wegzusammenhangskomponente.

Wegen der disjunkten offenen Zerlegung

$$\mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} : x < \sqrt{2}\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > \sqrt{2}\}$$

ist \mathbb{Q} auch nicht zusammenhängend.

In den bisher betrachteten Beispielen waren die Eigenschaften „wegzusammenhängend“ und „zusammenhängend“ gleichwertig. Der folgende Satz zeigt, dass dies in der Tat oft der Fall ist (wenn auch nicht immer, wie wir in Beispiel 3.8 sehen werden).

Satz 3.4 (Wegzusammenhang und Zusammenhang). *Es sei X ein topologischer Raum.*

- (a) *Ist X wegzusammenhängend, so ist X auch zusammenhängend.*
 (b) *Ist X zusammenhängend und besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung, so ist X auch wegzusammenhängend.*

Beweis.

- (a) Angenommen, X wäre nicht zusammenhängend, d. h. wir könnten $X = U \cup V$ als disjunkte Vereinigung nicht-leerer offener Mengen schreiben. Wir wählen Punkte $x \in U$ und $y \in V$. Da X als wegzusammenhängend vorausgesetzt ist, gibt es nun einen Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ von x nach y . Wegen $X = U \cup V$ ist dabei natürlich

$$[a, b] = \gamma^{-1}(U) \cup \gamma^{-1}(V).$$

Diese Vereinigung ist disjunkt, da U und V es sind. Die beiden vereinigten Mengen sind auch beide nicht leer (da sie den Punkt a bzw. b enthalten) und nach Satz 2.4 (b) offen. Damit müsste $[a, b]$ unzusammenhängend sein, im Widerspruch zu Beispiel 3.3 (a).

- (b) Beachte zunächst, dass alle Wegzusammenhangskomponenten offen sind: Ist nämlich U eine Wegzusammenhangskomponente von X , so gibt es nach Voraussetzung zu jedem $x \in U$ eine wegzusammenhängende Umgebung U_x , die damit natürlich in U liegen muss. Dies bedeutet genau, dass U offen ist.

Es sei nun V die Vereinigung aller anderen Wegzusammenhangskomponenten von X . Als Vereinigung offener Mengen ist V dann offen; und da die Wegzusammenhangskomponenten (als Klassen einer Äquivalenzrelation) eine Partition von X bilden, vereinigen sich U und V disjunkt zu X . Da X nun zusammenhängend ist, muss also $V = \emptyset$ gelten. Also war U schon die einzige Wegzusammenhangskomponente von X , d. h. X ist wegzusammenhängend. \square

Bemerkung 3.5. Die Zusatzbedingung in Satz 3.4 (b), dass jeder Punkt $x \in X$ eine wegzusammenhängende Umgebung besitzt, ist z. B. für offene Mengen in \mathbb{R}^n stets erfüllt. In diesem Fall stimmen die Begriffe „wegzusammenhängend“ und „zusammenhängend“ also überein. Wie schon angekündigt werden wir allerdings in Beispiel 3.8 gleich noch sehen, dass diese beiden Begriffe im Allgemeinen verschieden sind. Um die Zusammenhangseigenschaften in diesem Beispiel besser untersuchen zu können, wollen wir aber zunächst noch zwei Aussagen beweisen, die generell nützlich sind, um herauszufinden, ob ein gegebener Raum wegzusammenhängend bzw. zusammenhängend ist oder nicht. Das erste ist einfach die anschauliche Aussage, dass ein zusammenhängender Raum durch eine stetige Abbildung nicht „auseinander gerissen“, also unzusammenhängend gemacht werden kann.

Lemma 3.6. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen.*

- (a) *Ist X wegzusammenhängend, so auch $f(X)$.*
- (b) *Ist X zusammenhängend, so auch $f(X)$.*

Beweis.

- (a) Es seien $x, y \in f(X)$, also $x = f(x')$ und $y = f(y')$ für gewisse $x', y' \in X$. Da X wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow X$ mit $\gamma(a) = x'$ und $\gamma(b) = y'$. Der Weg $f \circ \gamma: [a, b] \rightarrow f(X)$ verbindet dann die Punkte x und y miteinander.
- (b) Angenommen, $f(X)$ wäre unzusammenhängend, d. h. es gäbe eine disjunkte Vereinigung $f(X) = U \cup V$ mit nicht-leeren und in $f(X)$ offenen Mengen U und V . Dann wäre auch $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ eine disjunkte Vereinigung von nicht-leeren offenen Mengen (siehe Satz 2.4 (b)). Dies ist ein Widerspruch dazu, dass X als zusammenhängend vorausgesetzt wurde. \square

Das zweite Lemma, das wir noch benötigen, ist zwar auch einfach, aber schon weit weniger anschaulich – und in der Tat auch einer der Punkte, in denen sich Wegzusammenhang und Zusammenhang unterschiedlich verhalten.

Lemma 3.7. *Es sei A eine Teilmenge eines topologischen Raumes X . Weiterhin sei $B \subset X$ eine Teilmenge mit $A \subset B \subset \bar{A}$, d. h. B entstehe aus A durch Hinzunehmen einiger Randpunkte.*

Ist dann A zusammenhängend, so auch B .

(Die entsprechende Aussage für „wegzusammenhängend“ ist falsch, wie wir in Beispiel 3.8 (b) sehen werden.)

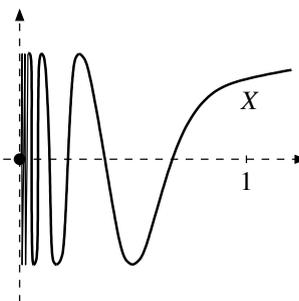
Beweis. Wäre B unzusammenhängend, so gäbe es eine disjunkte Zerlegung $B = U \cup V$ in nicht-leere und in B offene Teilmengen U und V . Die Mengen U und V enthalten wegen $B \subset \bar{A}$ also einen Berührungspunkt von A und müssen nach Definition 1.19 (b) damit auch einen Punkt von A enthalten, d. h. $A \cap U$ und $A \cap V$ sind nicht leer. Schneiden wir die Zerlegung $B = U \cup V$ also mit A , erhalten wir die disjunkte Zerlegung $A = (A \cap U) \cup (A \cap V)$ in zwei nicht-leere Teilmengen, die in der Teilraumtopologie von A offen sind. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass wir A als zusammenhängend vorausgesetzt haben. \square

Beispiel 3.8 (Ein zusammenhängender, aber nicht wegzusammenhängender Raum). Der folgende Raum ist wohl eines der einfachsten Beispiele dafür, dass die Begriffe des Wegzusammenhangs und des Zusammenhangs i. A. verschieden sind: Es sei

$$X = \{(0, 0)\} \cup \left\{ \left(x, \cos \frac{1}{x} \right) : x \in \mathbb{R}_{>0} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Dann gilt:

- (a) X ist zusammenhängend: Nach Beispiel 3.3 (a) ist $\mathbb{R}_{>0}$ zusammenhängend, nach Lemma 3.6 (b) also auch das Bild von $\mathbb{R}_{>0}$ unter der stetigen Abbildung $x \mapsto (x, \cos \frac{1}{x})$, d. h. der Raum $X \setminus \{(0, 0)\}$. Das Hinzufügen des Randpunktes $(0, 0)$ ändert nach Lemma 3.7 nun ebenfalls nichts mehr am Zusammenhang dieser Menge.



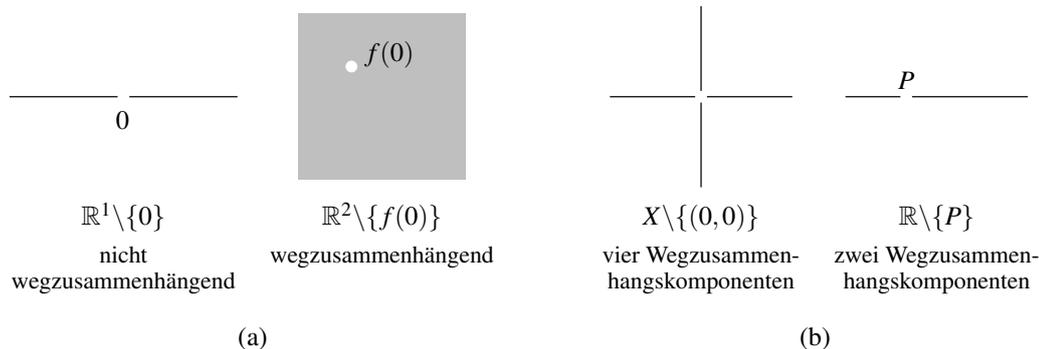
- (b) X ist nicht wegzusammenhängend: Andernfalls gäbe es einen Weg $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2): [a, b] \rightarrow X$ mit $\gamma(a) = (0, 0)$ und $\gamma(b) = (1, \cos 1)$. Nach dem Zwischenwertsatz für γ_1 gibt es für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ nun $x_n \in [a, b]$ mit $\gamma_1(x_n) = \frac{1}{2\pi n}$ und damit $\gamma_2(x_n) = \cos(2\pi n) = 1$; insbesondere gilt also $\gamma_1(x_n) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß [G2, Satz 6.21] können wir nun aus der Folge $(x_n)_n$ eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_k$ auswählen; es sei $x \in [a, b]$ ihr Grenzwert. Wegen der Stetigkeit von γ gilt dann $\gamma(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\gamma_1(x_{n_k}), \gamma_2(x_{n_k})) = (0, 1) \notin X$, was ein Widerspruch ist.

Beachte, dass dieses Argument auch zeigt, dass die Aussage von Lemma 3.7 nicht auch analog für wegzusammenhängende Mengen gelten kann – andernfalls könnte man nämlich das Argument von (a) wörtlich genauso auch für „wegzusammenhängend“ aufschreiben und würde im Widerspruch zu unserem gerade gezeigten Resultat erhalten, dass X auch wegzusammenhängend ist.

Beispiel 3.9. Mit Hilfe des (Weg-)Zusammenhangs können wir nun in einigen Fällen bereits zeigen, dass zwei topologische Räume nicht homöomorph sind. Offensichtlich ist natürlich, dass ein zusammenhängender Raum nicht zu einem unzusammenhängenden homöomorph sein kann; analog gilt dies auch für den Wegzusammenhang. Mit einem kleinen Trick kann man aus dieser Idee aber noch deutlich mehr herausholen:

- (a) Die reelle Gerade \mathbb{R}^1 ist nicht homöomorph zu einem anderen \mathbb{R}^n für $n > 1$: Angenommen, es gäbe einen solchen Homöomorphismus $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Nehmen wir dann aus \mathbb{R}^1 den Nullpunkt heraus, würden wir durch Einschränken von f natürlich auch einen Homöomorphismus von $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ bekommen. Dies ist aber ein Widerspruch, denn $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ ist nicht wegzusammenhängend, während \mathbb{R}^n für $n > 1$ offensichtlich auch nach Herausnahme eines Punktes noch wegzusammenhängend ist (siehe Bild unten für $n = 2$).
- (b) Das Achsenkreuz $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ in \mathbb{R}^2 ist nicht zur reellen Gerade \mathbb{R} homöomorph: Das Argument ist hier analog zu dem in (a). Nehmen wir nämlich aus X den Nullpunkt heraus, so erhalten wir vier Wegzusammenhangskomponenten, während \mathbb{R} nach Herausnehmen eines Punktes P in nur zwei Wegzusammenhangskomponenten zerfällt.
- (c) Die reellen Intervalle $[a, b]$, $[a, b)$ und (a, b) sind paarweise nicht homöomorph zueinander: Das Intervall $[a, b]$ besitzt genau zwei Punkte (nämlich die Randpunkte a und b), so dass es nach Herausnehmen einer dieser Punkte wegzusammenhängend bleibt. Das Intervall $[a, b)$ dagegen besitzt nur einen solchen Punkt a , und das Intervall (a, b) überhaupt keinen.



Aufgabe 3.10. Zeige, dass ein topologischer Raum X genau dann zusammenhängend ist, wenn in ihm „der Zwischenwertsatz für stetige Abbildungen nach \mathbb{R} gilt“, d.h. wenn zu jeder stetigen Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ und je zwei Punkten $x, y \in X$ jeder Wert zwischen $f(x)$ und $f(y)$ von f auf X angenommen wird.

Aufgabe 3.11. Anschaulich erklärt man Stetigkeit ja oft so, dass eine Funktion genau dann stetig ist, wenn man ihren Graphen zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen.

Beweise die folgende mathematisch exakte Version dieser Aussage: Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn ihr Graph $\Gamma := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 3.12. Wir betrachten auf dem Einheitsquadrat I^2 die lexikografische Ordnung

$$x < y \quad :\Leftrightarrow \quad x_1 < y_1 \text{ oder } (x_1 = y_1 \text{ und } x_2 < y_2)$$

und die dazugehörige *Ordnungstopologie* \mathcal{T} , die von den „offenen Intervallen“

$$\{x \in I^2 : a < x < b\}, \quad \{x \in I^2 : a < x\} \quad \text{und} \quad \{x \in I^2 : x < b\}$$

mit $a, b \in I^2$ erzeugt wird. Man zeige:

(a) I^2 ist mit dieser Ordnungstopologie zusammenhängend.

(Hinweis: Für alle $c \in I$ ist die zugehörige Teilraumtopologie auf dem Streifen $\{c\} \times I$ genau die Standardtopologie.)

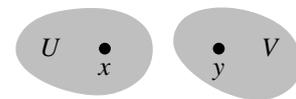
(b) I^2 ist mit dieser Ordnungstopologie nicht wegzusammenhängend.

03

4. Trennung und Kompaktheit

In diesem Kapitel wollen wir zwei weitere wichtige und miteinander zusammenhängende Eigenschaften topologischer Räume untersuchen – nämlich die Frage, welche Mengen sich durch offene Mengen trennen lassen, und die euch aus den „Grundlagen der Mathematik“ bereits bekannte Kompaktheit. Wir beginnen mit der wohl einfachsten und wichtigsten Trennungseigenschaft.

Definition 4.1 (Hausdorff-Räume). Ein topologischer Raum X heißt **Hausdorff-Raum**, wenn es zu zwei beliebigen verschiedenen Punkten $x, y \in X$ stets offene Umgebungen U von x und V von y gibt mit $U \cap V = \emptyset$. Man sagt in diesem Fall auch, dass sich Punkte von X durch offene Mengen trennen lassen.



Bemerkung 4.2. Ist die Topologie auf X durch eine Basis gegeben, so enthält jede offene Umgebung eines Punktes auch eine basis-offene Umgebung. Wir können in Definition 4.1 dann also genauso gut verlangen, dass sich Punkte von X durch basis-offene Mengen trennen lassen.

Beispiel 4.3.

- (a) Jeder metrische Raum X ist ein Hausdorff-Raum: Sind $x, y \in X$ mit $x \neq y$ und wählen wir $\varepsilon \leq \frac{1}{2}d(x, y)$, so sind die ε -Kugeln $U_\varepsilon(x)$ und $U_\varepsilon(y)$ um x und y disjunkte Umgebungen dieser Punkte. Wäre nämlich $z \in U_\varepsilon(x) \cap U_\varepsilon(y)$, also $d(z, x) < \varepsilon$ und $d(z, y) < \varepsilon$, so würde aus der Dreiecksungleichung der Widerspruch

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < 2\varepsilon \leq d(x, y)$$

folgen.

- (b) Jede Teilmenge Y eines Hausdorff-Raumes X ist selbst wieder ein Hausdorff-Raum: Sind U und V trennende Umgebungen in X von zwei verschiedenen Punkten $x, y \in Y$, so sind $Y \cap U$ und $Y \cap V$ trennende Umgebungen dieser Punkte in der Teilraumtopologie von Y .
- (c) Die diskrete Topologie auf einer beliebigen Menge X ist immer ein Hausdorff-Raum, da hier die Punkte selbst trennende offene Mengen bilden. Hat X mindestens 2 Elemente, ist die indiskrete Topologie auf X dagegen nie eine Hausdorff-Topologie, da zu jedem Punkt $x \in X$ der gesamte Raum X die einzige Umgebung von x ist. Ebenso sind die Komplementendlich-Topologie auf einer unendlichen Menge und die Komplement-abzählbar-Topologie auf einer überabzählbaren Menge keine Hausdorff-Topologien (siehe Beispiel 1.5 (c)), da auch hier zwei beliebige nicht-leere offene Mengen stets einen Schnittpunkt besitzen.

Wir sehen also schon, dass die meisten in der Praxis vorkommenden Räume die Hausdorff-Eigenschaft besitzen. Bevor wir untersuchen, welche schönen Folgerungen sich aus dieser Eigenschaft ergeben, wollen wir zunächst noch eine oft benutzte, dazu äquivalente Bedingung angeben.

Lemma 4.4 (Hausdorff = Diagonale ist abgeschlossen). *Ein topologischer Raum X ist genau dann ein Hausdorff-Raum, wenn die **Diagonale***

$$\Delta_X := \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$$

abgeschlossen ist (in der Produkttopologie von $X \times X$).

Beweis. Dies ist letztlich nur eine einfache Umformulierung der Bedingung aus Definition 4.1: Es gilt

- X ist Hausdorff-Raum
- \Leftrightarrow für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es $U, V \subset X$ offen mit $x \in U, y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$
- \Leftrightarrow für alle $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta_X$ gibt es $U, V \subset X$ offen mit $(x, y) \in U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta_X$
- $\Leftrightarrow (X \times X) \setminus \Delta_X$ ist offen
- (denn die Mengen der Form $U \times V$ bilden eine Basis der Produkttopologie)
- $\Leftrightarrow \Delta_X$ ist abgeschlossen. □

Lemma 4.5 (Eigenschaften von Hausdorff-Räumen). *Es sei X ein Hausdorff-Raum. Dann gilt:*

- (a) Sind $f, g: Y \rightarrow X$ zwei stetige Abbildungen von einem weiteren topologischen Raum Y nach X , so ist die Menge $\{y \in Y : f(y) = g(y)\}$ abgeschlossen (und $\{y \in Y : f(y) \neq g(y)\}$ damit offen).
- (b) Für alle $a \in X$ ist die einpunktige Menge $\{a\} \subset X$ abgeschlossen.

Beweis.

- (a) Da X ein Hausdorff-Raum ist, ist die Diagonale $\Delta_X \subset X \times X$ nach Lemma 4.4 abgeschlossen. Die Menge $\{y \in Y : f(y) = g(y)\}$ ist nun aber genau das Urbild dieser Diagonalen unter der gemäß Lemma 2.10 (b) stetigen Abbildung $(f, g): Y \rightarrow X \times X, y \mapsto (f(y), g(y))$, also abgeschlossen nach Satz 2.4 (e).
- (b) Dies ergibt sich sofort aus (a), angewendet auf die offensichtlich stetigen Abbildungen $f: X \rightarrow X, x \mapsto x$ und $g: X \rightarrow X, x \mapsto a$. □

Bemerkung 4.6 (Eindeutigkeit von Grenzwerten in Hausdorff-Räumen).

- (a) Die aus den „Grundlagen der Mathematik“ für metrische Räume bereits bekannte Eigenschaft aus Lemma 4.5 (a), dass durch Gleichungen zwischen stetigen Funktionen definierte Mengen abgeschlossen sind [G2, Beispiel 24.18], lässt sich auch so interpretieren, dass Funktionsgrenzwerte in Hausdorff-Räumen stets eindeutig sind. Dazu sei $f: D \rightarrow X$ eine Abbildung von einer Teilmenge D eines topologischen Raumes Y in einen Hausdorff-Raum X . Ist dann $a \in \overline{D} \setminus D$ und sind $f_1, f_2: D \cup \{a\} \rightarrow X$ zwei stetige Fortsetzungen von f nach a (so dass man ihre Funktionswerte $f_1(a)$ und $f_2(a)$ also als Grenzwerte von f für $x \rightarrow a$ auffassen kann), so besagt Lemma 4.5 (a) genau, dass $\{y \in D \cup \{a\} : f_1(y) = f_2(y)\}$ abgeschlossen ist, also mit D auch den Punkt a enthält: Es ist $f_1(a) = f_2(a)$, d. h. es gibt höchstens eine stetige Fortsetzung von f nach a .
- (b) Analog dazu sind in einem Hausdorff-Raum X auch Folggrenzwerte eindeutig: Sind U und V trennende Umgebungen zweier Punkte $x, y \in X$, so kann mit der üblichen Grenzwertdefinition offensichtlich keine Folge sowohl x als auch y als Grenzwert haben, da nicht gleichzeitig fast alle Folgenglieder sowohl in U als auch in V liegen können.

Insgesamt zeigen uns Lemma 4.5 und Bemerkung 4.6 also, dass die Hausdorff-Bedingung viele wünschenswerte Eigenschaften sicherstellt. Die allermeisten Räume, die wir ab jetzt betrachten werden, werden daher Hausdorff-Räume sein, und etliche Sätze werden diese Bedingung auch als Voraussetzung haben.

Als Nächstes wollen wir uns nun mit dem wichtigen Begriff der Kompaktheit beschäftigen, den ihr ja bereits aus den „Grundlagen der Mathematik“ kennt. Dort wurde gezeigt, dass für Teilmengen K von \mathbb{R}^n die folgenden drei Eigenschaften äquivalent sind [G2, Satz 23.51 und 23.58], und solche Mengen dann *kompakt* genannt:

- (a) K ist beschränkt und abgeschlossen.
- (b) Jede Folge in K hat eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K .
- (c) Jede offene Überdeckung von K hat eine endliche Teilüberdeckung.

Wie ihr euch vielleicht schon denken könnt, bleibt von diesen Äquivalenzen in allgemeinen topologischen Räumen leider nicht mehr viel übrig. In der Tat lässt sich die Beschränktheit in Bedingung (a) natürlich überhaupt nur in metrischen Räumen formulieren, und von der in \mathbb{R}^n geltenden Äquivalenz (b) \Leftrightarrow (c) sind in beliebigen topologischen Räumen sogar beide Richtungen falsch. Da wir in Aufgabe 2.9 schon gesehen haben, dass Folgen im Allgemeinen nicht die erwarteten Resultate liefern, ist also klar, dass (c) für allgemeine topologische Räume die „richtige“ Definition der Kompaktheit sein muss (obwohl es natürlich die unanschaulichste von ihnen ist).

Definition 4.7 (Kompaktheit). Ein topologischer Raum X heißt **kompakt**, wenn gilt: Ist J eine beliebige Indexmenge und sind U_i für $i \in J$ offene Teilmengen von X mit $X = \bigcup_{i \in J} U_i$, so gibt es bereits eine *endliche* Teilmenge $J' \subset J$ mit $X = \bigcup_{i \in J'} U_i$. (Man sagt: „Jede offene Überdeckung von X hat eine endliche Teilüberdeckung“.)

Bemerkung 4.8.

- (a) Es ist wichtig zu verstehen, dass Kompaktheit eine Eigenschaft eines topologischen Raumes, und nicht (wie z. B. Offenheit oder Abgeschlossenheit) einer Teilmenge eines topologischen Raumes ist.

Ist K eine Teilmenge eines topologischen Raumes X , so definieren wir die Kompaktheit von K also über die Teilraumtopologie von K . Mit anderen Worten ist $K \subset X$ damit kompakt, wenn es zu jeder Überdeckung $K = \bigcup_{i \in J} (K \cap U_i)$ durch in K offene Mengen $K \cap U_i$ (mit U_i offen in X) eine endliche Teilüberdeckung $K = \bigcup_{i \in J'} (K \cap U_i)$ gibt. Offensichtlich ist dies äquivalent dazu, dass es im Fall $K \subset \bigcup_{i \in J} U_i$ eine endliche Menge $J' \subset J$ mit $K \subset \bigcup_{i \in J'} U_i$ gibt. In dieser Form – bei der die Vereinigung der offenen Mengen K enthalten, aber nicht gleich K sein muss – habt ihr die Kompaktheit von Teilmengen vermutlich bisher kennengelernt.

- (b) Analog zur Hausdorff-Eigenschaft genügt es im Fall eines durch eine Basis gegebenen topologischen Raumes X , die Überdeckungseigenschaft für basis-offene Mengen zu überprüfen. In jeder offenen Überdeckung von X ist nämlich jede dieser Mengen selbst wieder eine Vereinigung basis-offener Mengen, so dass wir also letztlich eine Überdeckung durch basis-offene Mengen gegeben haben. Natürlich genügt es dann zu zeigen, dass bereits endlich viele dieser basis-offenen Mengen X überdecken, weil ja jede von ihnen in einer der ursprünglich gegebenen offenen Mengen enthalten ist und daher dann auch diese endlich vielen entsprechenden ursprünglichen Mengen den Raum überdecken.
- (c) In der Literatur nennt man einen topologischen Raum X mit der Eigenschaft aus Definition 4.7 statt kompakt manchmal nur *quasikompakt*, und definiert einen kompakten Raum dann als einen quasikompakten Hausdorff-Raum.

Beispiel 4.9.

- (a) Wie oben schon erwähnt, wissen wir aus den „Grundlagen der Mathematik“, dass eine Teilmenge des \mathbb{R}^n genau dann kompakt ist, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist [G2, Satz 23.58].
- (b) Ein endlicher Raum sowie einer mit der indiskreten Topologie ist stets trivialerweise kompakt; ein unendlicher mit der diskreten Topologie hingegen niemals (da die Überdeckung durch die einelementigen offenen Mengen $\{x\}$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt).
- (c) Da die Kompaktheit eine Eigenschaft eines topologischen Raumes ist (und nicht einer Teilmenge eines Raumes, siehe Bemerkung 4.8 (a)), können wir sie verwenden, um Räume als nicht homöomorph zu erkennen. So ist z. B. die abgeschlossene euklidische Einheitskreisscheibe $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ nicht homöomorph zur offenen Einheitskreisscheibe $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\}$, da von diesen beiden Räumen nur D^2 kompakt ist.

Wir wollen nun sehen, welche der aus den Grundlagen der Mathematik bekannten Eigenschaften kompakter Teilmengen metrischer Räume auf beliebige kompakte Räume übertragbar sind. Wir beginnen mit ein paar Aussagen, die sich unmittelbar aus der Definition ergeben.

Satz 4.10 (Eigenschaften kompakter Räume). *Es seien X und Y topologische Räume.*

- (a) *Ist $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung und X kompakt, so ist auch $f(X) \subset Y$ kompakt.*
- (b) *Ist X kompakt, so ist auch jede abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ kompakt.*
- (c) *Sind $K, L \subset X$ kompakt, so ist auch $K \cup L$ kompakt.*

Beweis.

- (a) Es seien $U_i \subset Y$ offen für alle $i \in J$ mit $f(X) \subset \bigcup_{i \in J} U_i$ (siehe Bemerkung 4.8 (a)). Dann bilden die nach Satz 2.4 (b) offenen Mengen $f^{-1}(U_i)$ für $i \in J$ eine Überdeckung von X . Wegen der Kompaktheit von X gibt es daher eine endliche Menge $J' \subset J$ mit $X = \bigcup_{i \in J'} f^{-1}(U_i)$, also auch mit $f(X) \subset \bigcup_{i \in J'} U_i$. Damit ist $f(X)$ kompakt.
- (b) Wie in Bemerkung 4.8 (a) seien $U_i \subset X$ offen für alle $i \in J$ mit $A \subset \bigcup_{i \in J} U_i$. Dann ist

$$(X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in J} U_i$$

eine offene Überdeckung von X , aus der wir wegen der Kompaktheit von X eine endliche Teilüberdeckung

$$(X \setminus A) \cup \bigcup_{i \in J'} U_i$$

von X auswählen können. Da hierbei kein Punkt aus A von der ersten Menge $X \setminus A$ überdeckt wird, muss jeder Punkt von A in einem U_i mit $i \in J'$ enthalten sein. Also ist $A \subset \bigcup_{i \in J'} U_i$, d. h. A ist kompakt.

- (c) Es seien nun $U_i \subset X$ offen für alle $i \in J$ mit $K \cup L \subset \bigcup_{i \in J} U_i$. Dann überdecken diese offenen Mengen natürlich auch K und L . Da K und L kompakt sind, gibt es also endliche Teilmengen $J', J'' \subset J$ mit $K \subset \bigcup_{i \in J'} U_i$ und $L \subset \bigcup_{i \in J''} U_i$. Damit ist $K \cup L \subset \bigcup_{i \in J' \cup J''} U_i$, d. h. $K \cup L$ ist kompakt. \square

Den folgenden Satz, dass Produkte kompakter Mengen kompakt sind, erhält man ebenfalls aus einer geeigneten Anwendung der Überdeckungseigenschaft auf beide Faktoren. Wir beweisen ihn gleich in einer etwas allgemeineren Version, die wir im darauf folgenden Satz noch benötigen werden.

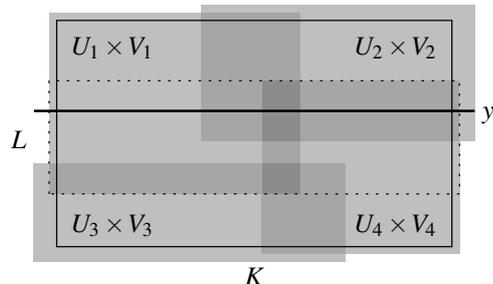
Satz 4.11 (Produkte kompakter Mengen sind kompakt). *Es seien K und L zwei kompakte Teilmengen in topologischen Räumen X bzw. Y . Sind dann J eine beliebige Indexmenge und $W_i \subset X \times Y$ offen für $i \in J$ mit $K \times L \subset \bigcup_{i \in J} W_i$, so gibt es eine endliche Menge $J' \subset J$ und offene Teilmengen $U \subset X$ und $V \subset Y$ mit*

$$K \times L \subset U \times V \subset \bigcup_{i \in J'} W_i.$$

Insbesondere sind Produkte kompakter Räume also kompakt.

Beweis. Wie in Bemerkung 4.8 (b) dürfen wir annehmen, dass die Mengen W_i basis-offen in der Produkttopologie sind, also die Form $W_i = U_i \times V_i$ für offene Mengen $U_i \subset X$ und $V_i \subset Y$ haben.

Das Bild rechts zeigt eine solche Situation (bei der wir allerdings aus hoffentlich verständlichen Gründen von vornherein nur endlich viele W_i eingezeichnet haben, so dass das Bild letztlich nur als schematische Hilfe angesehen werden kann, um die folgenden Konstruktionen zu verdeutlichen). Das durchgezogene gezeichnete Rechteck ist dabei $K \times L$, und dunkler gefärbte Gebiete deuten an, wo sich die Mengen W_i überlappen.



Für ein zunächst festes $y \in L$ betrachten wir die Menge $J_y := \{i \in J : y \in V_i\}$ aller Indizes, deren zugehörige Mengen W_i den horizontalen Schnitt $X \times \{y\}$ treffen; im Bild oben also z. B. $J_y = \{1, 2, 4\}$.

Dann ist $\bigcup_{i \in J_y} (U_i \times V_i)$ eine offene Überdeckung von $K \times \{y\}$, und damit $\bigcup_{i \in J_y} U_i$ eine offene Überdeckung von K . Weil K kompakt ist, können wir also eine endliche Teilmenge $J'_y \subset J_y$ auswählen, so dass bereits $K \subset \bigcup_{i \in J'_y} U_i =: \tilde{U}_y$ ist (im Beispiel oben können wir z. B. $J'_y = \{1, 4\}$ wählen).

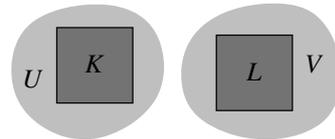
In $X \times Y$ überdecken die Quader $U_i \times V_i$ mit $i \in J'_y$ nun aber natürlich nicht nur $K \times \{y\}$, sondern sogar einen ganzen offenen Streifen $\tilde{U}_y \times \tilde{V}_y$ mit $\tilde{V}_y := \bigcap_{i \in J'_y} V_i$ (beachte, dass diese Menge offen ist, da wir nur endlich viele offene Mengen schneiden). Im Bild ist dieser Streifen mit einer gestrichelten Linie eingezeichnet.

Wegen $y \in \tilde{V}_y$ für alle $y \in L$ überdecken diese offenen Mengen \tilde{V}_y aber die Menge L , und daher können wir wegen der Kompaktheit von L nun $y_1, \dots, y_n \in L$ wählen, so dass $L \subset \tilde{V}_{y_1} \cup \dots \cup \tilde{V}_{y_n} =: V$. Die Mengen $U_i \times V_i$ für alle i in der endlichen Indexmenge $J'_{y_1} \cup \dots \cup J'_{y_n}$ überdecken dann wie gewünscht die offene Menge $U \times V$ mit $U = \tilde{U}_{y_1} \cap \dots \cap \tilde{U}_{y_n} \supset K$. □

Kombinieren wir diese Ergebnisse nun mit der Hausdorff-Eigenschaft, so erhalten wir noch die folgenden zwei weiteren wichtigen Aussagen.

Satz 4.12 (Kompakte Mengen in Hausdorff-Räumen). *Es sei X ein Hausdorff-Raum.*

- (a) Sind K und L kompakte Teilmengen von X mit $K \cap L = \emptyset$, so gibt es offene Mengen $U \supset K$ und $V \supset L$ mit $U \cap V = \emptyset$. (In Hausdorff-Räumen lassen sich also nicht nur Punkte, sondern sogar kompakte Mengen durch offene Mengen trennen.)



- (b) Jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ ist abgeschlossen.

Beweis.

- (a) Da X ein Hausdorff-Raum ist, ist die Diagonale $\Delta_X \subset X \times X$ nach Lemma 4.4 abgeschlossen. Ihr Komplement $(X \times X) \setminus \Delta_X$ ist also offen und überdeckt wegen $K \cap L = \emptyset$ die Menge $K \times L$. In dieser Situation haben wir aber in Satz 4.11 (angewendet auf eine Überdeckung mit nur einer offenen Menge) gesehen, dass es offene Teilmengen $U \supset K$ und $V \supset L$ gibt mit $U \times V \subset (X \times X) \setminus \Delta_X$, also mit $U \cap V = \emptyset$.
- (b) Für jedes $x \in X \setminus K$ ist die einpunktige Menge $\{x\}$ kompakt (siehe Beispiel 4.9 (b)) und lässt sich daher nach (a) von K durch offene Mengen trennen. Insbesondere gibt es also eine offene Menge U_x mit $x \in U_x \subset X \setminus K$. Vereinigen wir alle diese Mengen miteinander, so erhalten wir wie gewünscht die offene Menge $\bigcup_{x \in X \setminus K} U_x = X \setminus K$. Also ist K abgeschlossen. □

Bemerkung 4.13.

- (a) Ohne die Voraussetzung eines Hausdorff-Raumes ist die aus den „Grundlagen der Mathematik“ bereits bekannte Aussage aus Satz 4.12 (b) in der Regel falsch: In der indiskreten Topologie auf einer beliebigen Menge X ist jede Teilmenge $K \subset X$ kompakt (da die triviale Überdeckung, die nur aus der Menge X besteht, die einzige offene Überdeckung von K ist), aber außer \emptyset und X ist keine Teilmenge abgeschlossen in X .
- (b) Sind K und L kompakte Teilmengen eines Hausdorff-Raumes X , so ist K nach Satz 4.12 (b) abgeschlossen in X , also $K \cap L$ abgeschlossen in L und damit nach Satz 4.10 (b) auch kompakt.

In Hausdorff-Räumen sind also nicht nur Vereinigungen (wie in Satz 4.10 (c)), sondern auch Durchschnitte von zwei kompakten Mengen wieder kompakt. Wir werden in Bemerkung 5.10 noch sehen, dass dies in allgemeinen topologischen Räumen falsch ist.

Setzen wir die Aussagen aus Satz 4.10 und 4.12 schließlich noch zusammen, so erhalten wir ein einfaches hinreichendes Kriterium dafür, wann eine stetige und bijektive Abbildung bereits ein Homöomorphismus ist (siehe Bemerkung 2.14 (b)).

Folgerung 4.14. *Es sei $f: X \rightarrow Y$ eine stetige und bijektive Abbildung zwischen topologischen Räumen. Ferner setzen wir voraus, dass X kompakt und Y ein Hausdorff-Raum ist. Dann ist auch f^{-1} stetig, d. h. f ist ein Homöomorphismus.*

Beweis. Nach Satz 2.4 (c) genügt es zu zeigen, dass unter f^{-1} Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind, d. h. dass unter f Bilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind. Es sei also $A \subset X$ abgeschlossen. Da X kompakt ist, ist nach Satz 4.10 (b) dann auch A kompakt. Nach Satz 4.10 (a) ist damit $f(A)$ als Teilmenge von Y kompakt, und nach Satz 4.12 (b) ist diese Teilmenge dann auch abgeschlossen in Y . \square

Beispiel 4.15. Wir erinnern uns noch einmal an die Peano-Kurve aus Satz 2.18 – eine stetige und surjektive Abbildung vom Einheitsintervall $I \subset \mathbb{R}$ in das Einheitsquadrat $I^2 \subset \mathbb{R}^2$. Mit Hilfe von Folgerung 4.14 sehen wir nun, dass wir jedoch keine stetige und bijektive Abbildung zwischen diesen Mengen finden können: Da I kompakt und I^2 ein Hausdorff-Raum ist, müsste diese sonst nämlich auch ein Homöomorphismus sein, was wir aber in Beispiel 3.9 (a) bereits ausgeschlossen haben.

Aufgabe 4.16 (Einpunktkompaktifizierung). Es sei X ein Hausdorff-Raum, der nicht kompakt ist. Wir wollen in dieser Aufgabe untersuchen, wie man X durch Hinzunehmen eines „unendlich fernen Punktes“ zu einem kompakten Raum machen kann. Dazu setzen wir $\hat{X} := X \cup \{\infty\}$ (wobei „ ∞ “ einfach nur der Name des neu hinzugefügten Punktes ist) sowie

$$\mathcal{T} := \{U : U \subset X \text{ offen}\} \cup \{\hat{X} \setminus K : K \subset X \text{ kompakt}\} \subset \mathcal{P}(\hat{X}).$$

Man zeige:

- \mathcal{T} ist eine Topologie auf \hat{X} , und \hat{X} ist mit dieser Topologie kompakt.
- X liegt dicht in \hat{X} .
- Besitzt in X jeder Punkt eine kompakte Umgebung, so ist auch \hat{X} ein Hausdorff-Raum.

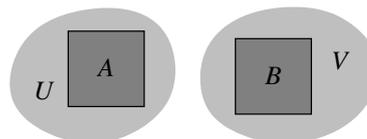
Man nennt \hat{X} die *Einpunktkompaktifizierung* von X . In der folgenden Aufgabe werden wir zwei Beispiele dazu untersuchen.

Aufgabe 4.17. Es bezeichne \hat{X} noch einmal die Einpunktkompaktifizierung eines topologischen Raumes X wie in Aufgabe 4.16.

- Zeige, dass $\hat{\mathbb{R}}$ homöomorph zur Kreislinie S^1 ist.
- Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in einem topologischen Raum Y . Wir können diese Folge dann natürlich auch als Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow Y$, $n \mapsto a_n$ auffassen.
Zeige, dass $(a_n)_n$ genau dann gegen ein $a \in Y$ konvergiert, wenn sich diese Funktion f durch die Festsetzung $f(\infty) := a$ zu einer stetigen Funktion von $\hat{\mathbb{N}}$ nach Y fortsetzen lässt.

Wir haben in Satz 4.12 (a) gesehen, dass sich in einem Hausdorff-Raum nicht nur Punkte, sondern auch kompakte Mengen durch offene Mengen trennen lassen. Derartige Trennungseigenschaften spielen in der Topologie eine wichtige Rolle. Wir wollen daher noch eine weitere solche Eigenschaft untersuchen, die letztlich auch interessante Schlussfolgerungen über stetige reellwertige Funktionen auf solchen Räumen zulassen wird (siehe Satz 4.24).

Definition 4.18 (Normale Räume). Ein topologischer Raum X heißt **normal**, wenn es zu je zwei abgeschlossenen Mengen $A, B \subset X$ mit $A \cap B = \emptyset$ stets offene Mengen $U \supset A$ und $V \supset B$ gibt mit $U \cap V = \emptyset$.



Bemerkung 4.19 (Abweichende Bezeichnungen in der Literatur).

- Analog zur Kompaktheit (siehe Bemerkung 4.8 (c)) wird auch die Normalität eines topologischen Raumes in der Literatur manchmal so definiert, dass sie zusätzlich zur Bedingung aus Definition 4.18 noch die Hausdorff-Eigenschaft verlangt.

- (b) Da es insgesamt viele verschiedene Trennungseigenschaften gibt, werden diese auch oft einfach nur durchnummeriert und mit T_i für verschiedene Zahlen i bezeichnet. In dieser Notation heißt dann z. B. die Hausdorff-Eigenschaft T_2 und die Normalität T_4 , es gibt aber auch noch T_0 , T_1 , $T_{2\frac{1}{2}}$ und einige andere, die wir hier jedoch nicht behandeln wollen (und deren Bezeichnung auch nicht überall einheitlich ist) [Q, Kapitel 6].

Beispiel 4.20.

- (a) Jeder metrische Raum ist normal; das Argument hierfür ist ähnlich zu dem für die Hausdorff-Eigenschaft in Beispiel 4.3 (a): Sind A und B abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$, so gibt es zunächst zu jedem $a \in A$ ein $\varepsilon_a > 0$ mit $U_{\varepsilon_a}(a) \subset X \setminus B$, da a in der offenen Menge $X \setminus B$ liegt. Analog gibt es zu jedem $b \in B$ ein $\delta_b > 0$ mit $U_{\delta_b}(b) \subset X \setminus A$. Dann sind die Mengen

$$U := \bigcup_{a \in A} U_{\varepsilon_a/2}(a) \quad \text{und} \quad V := \bigcup_{b \in B} U_{\delta_b/2}(b)$$

als Vereinigungen offener Kugeln offen und enthalten natürlich A bzw. B . Außerdem ist $U \cap V = \emptyset$: Gäbe es ein Element $x \in U \cap V$, so wäre $d(x, a) < \frac{\varepsilon_a}{2}$ und $d(x, b) < \frac{\delta_b}{2}$ für gewisse $a \in A$ und $b \in B$. Ist nun ohne Einschränkung $\delta_b \leq \varepsilon_a$, so erhalten wir

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\delta_b}{2} \leq \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\varepsilon_a}{2} = \varepsilon_a$$

und damit $b \in U_{\varepsilon_a}(a)$ im Widerspruch zu $U_{\varepsilon_a}(a) \subset X \setminus B$. Damit ist also $U \cap V = \emptyset$, und wir haben wie gewünscht zwei trennende offene Mengen zu A und B gefunden.

- (b) Kompakte Hausdorff-Räume sind stets normal, denn in ihnen sind abgeschlossene Mengen nach Satz 4.10 (b) kompakt und damit nach Satz 4.12 (a) durch offene Mengen trennbar.
- (c) Ein indiskreter Raum (mit mehr als einem Punkt) ist nach Beispiel 4.3 (c) zwar kein Hausdorff-Raum, aber trivialerweise normal (da es in ihm überhaupt keine zwei disjunkten, nicht-leeren abgeschlossenen Mengen gibt). Auch ein diskreter Raum ist trivialerweise normal, da wir hier stets $U = A$ und $V = B$ setzen können.
- (d) Die reelle Gerade ist mit der Komplement-endlich-Topologie (siehe Beispiel 1.5 (c)) nicht normal: In diesem Raum sind nämlich Punkte abgeschlossen, aber nicht durch offene Mengen trennbar, da zwei beliebige nicht-leere offene Mengen stets einen nicht-leeren Durchschnitt haben.

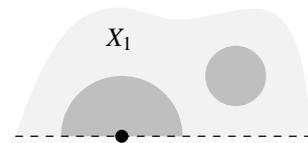
Aufgabe 4.21. Zeige, dass die Sorgenfrey-Topologie auf \mathbb{R} (siehe Beispiel 1.18) normal ist.

Aufgabe 4.22. Wir betrachten die folgenden beiden topologischen Räume:

- $X_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, wobei die Topologie erzeugt wird von allen offenen Kreisscheiben, die die reelle Achse nicht treffen, und allen Mengen der Form

$$\{a\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 \text{ und } |z - a| < r\}$$

für $a \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$.



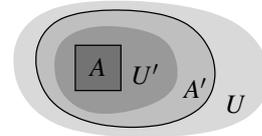
- $X_2 = (0, 1)$ mit außer \emptyset und X_2 genau den offenen Mengen der Form $(\frac{1}{n}, 1)$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Ihr braucht nicht zu zeigen, dass es sich dabei wirklich um Topologien handelt. Benutzt diese Räume, um folgende Aussagen zu zeigen:

- (a) Nicht jeder Hausdorff-Raum ist normal.
- (b) Ein Raum X heißt *regulär* oder T_3 -Raum, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ mit $x \notin A$ offene Mengen $U \ni x$ und $V \supset A$ gibt mit $U \cap V = \emptyset$. Diese Bedingung ist weder zur Hausdorff-Eigenschaft noch zur Normalität äquivalent.

Durch einen geeigneten Übergang zu Komplementen erhalten wir die folgende äquivalente Umformulierung der Normalitätsbedingung, die wir später noch benötigen werden.

Lemma 4.23. *Ein topologischer Raum X ist genau dann normal, wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge A und offenen Menge U mit $A \subset U$ eine weitere abgeschlossene Menge A' und offene Menge U' gibt mit $A \subset U' \subset A' \subset U$.*



Beweis. Wir formulieren die Bedingung des Lemmas um, indem wir $B := X \setminus U$ und $V' := X \setminus A'$ setzen. Dabei sind U und V' dann natürlich genau dann offen, wenn B bzw. A' abgeschlossen sind. Da weiterhin $A \subset U$ äquivalent ist zu $A \cap B = A \cap (X \setminus U) = \emptyset$, besagt die gegebene Bedingung also genau: Zu abgeschlossenen Mengen A und B mit $A \cap B = \emptyset$ gibt es offene Mengen V' und U' mit $A \subset U'$, $U' \subset X \setminus V'$ (d. h. $U' \cap V' = \emptyset$) und $X \setminus V' \subset X \setminus B$ (d. h. $B \subset V'$). Dies ist offensichtlich exakt die Normalitätsbedingung aus Definition 4.18. \square

Der entscheidende Grund, warum gerade die Trennbarkeit von abgeschlossenen Mengen wichtig ist, ist die folgende überraschende Äquivalenz dieser Eigenschaft zur Existenz gewisser stetiger, reellwertiger Funktionen.

Satz 4.24 (Lemma von Urysohn). *Für einen topologischen Raum X sind äquivalent:*

- (a) X ist normal.
- (b) Zu je zwei abgeschlossenen Mengen $A, B \subset X$ mit $A \cap B = \emptyset$ gibt es eine stetige Funktion $f: X \rightarrow I$ in das Einheitsintervall (mit der Standardtopologie) mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$. (Man sagt auch: „Abgeschlossene Mengen lassen sich durch stetige Funktionen trennen“.)

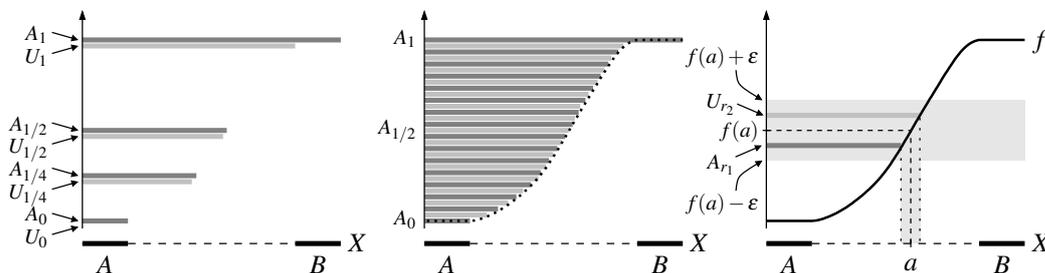
Beweis. Es seien $A, B \subset X$ zwei abgeschlossene Mengen mit $A \cap B = \emptyset$.

„(a) \Rightarrow (b)“: Wir konstruieren zunächst für alle $r \in I \cap \mathbb{Q}$ eine offene Menge $U_r \subset X$ und eine abgeschlossene Menge $A_r \subset X$ wie folgt. Als Erstes setzen wir $U_0 := \emptyset$, $A_0 := A$, $U_1 := X \setminus B$ und $A_1 := X$. Da die Menge $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ abzählbar ist [G2, Beispiel 5.58 (a)], können wir nun wegen der Normalität von X nach Lemma 4.23 rekursiv über eine solche Abzählung Mengen U_r und A_r für alle $r \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ finden mit

$$U_r \subset A_r \quad \text{für alle } r \in I \cap \mathbb{Q}$$

und $A_r \subset U_s$ für alle $r, s \in I \cap \mathbb{Q}$ mit $r < s$.

Beginnen wir die Abzählung von $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$ z. B. mit $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots)$, so würden wir nach Lemma 4.23 wie im Bild unten links zunächst $U_{1/2}$ und $A_{1/2}$ finden mit $A_0 \subset U_{1/2} \subset A_{1/2} \subset U_1$, und als Nächstes dann $U_{1/4}$ und $A_{1/4}$ mit $A_0 \subset U_{1/4} \subset A_{1/4} \subset U_{1/2}$. Auf diese Art bekommen wir rekursiv wie im mittleren Bild die gewünschten Mengen U_r und A_r für alle $r \in I \cap \mathbb{Q}$. Wir setzen ihren Indexpbereich auf ganz \mathbb{Q} fort, indem wir $U_r = A_r = \emptyset$ für $r < 0$ und $U_r = A_r = X$ für $r > 1$ setzen.



Die gesuchte Funktion f definieren wir nun als „Einhüllende“ der Mengen A_r , also als

$$f: X \rightarrow I, x \mapsto \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \in A_r\}.$$

Die Menge, von der hier das Infimum gebildet wird, ist offensichtlich stets eine Teilmenge von $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ und enthält $\mathbb{Q}_{\geq 1}$; sie ist darüber hinaus gleich $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ für $x \in A$ und gleich $\mathbb{Q}_{\geq 1}$ für $x \in B$. Damit ist f wirklich eine Funktion nach I , und es gilt $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass f stetig ist. Beachte dazu zunächst für alle $r \in \mathbb{Q}$:

- (1) Ist $x \in U_r$ bzw. $x \in A_r$, so ist $x \in A_s$ für alle $s > r$, und damit $f(x) = \inf\{s \in \mathbb{Q} : x \in A_s\} \leq r$.
 (2) Ist $x \notin U_r$ bzw. $x \notin A_r$, so ist $x \notin A_s$ für alle $s < r$, und damit $f(x) = \inf\{s \in \mathbb{Q} : x \in A_s\} \geq r$.

Es seien nun $a \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wie im Bild oben rechts wählen wir $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$ mit

$$f(a) - \varepsilon < r_1 < f(a) < r_2 < f(a) + \varepsilon$$

und betrachten die offene Menge $U = U_{r_2} \setminus A_{r_1}$. Dann gilt:

- Wegen $f(a) < r_2$ ist $a \in U_{r_2}$ nach (2), und wegen $f(a) > r_1$ ist $a \notin A_{r_1}$ nach (1). Also gilt $a \in U$.
- Für alle $x \in U_{r_2}$ ist $f(x) \leq r_2 < f(a) + \varepsilon$ nach (1), und für alle $x \notin A_{r_1}$ ist $f(x) \geq r_1 > f(a) - \varepsilon$ nach (2). Also gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in U$.

Insgesamt ist U damit eine Umgebung von a , die unter f ganz in die ε -Umgebung von $f(a)$ abgebildet wird. Also ist f stetig.

„(b) \Rightarrow (a)“: Nach (b) gibt es eine stetige Funktion $f: X \rightarrow I$ mit $f|_A = 0$ und $f|_B = 1$. Für die nach Satz 2.4 (b) offenen Mengen $U := f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ und $V := f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ gilt dann $U \supset A$, $V \supset B$ und $U \cap V = \emptyset$. Also ist X normal. \square

Bemerkung 4.25.

- (a) Natürlich gilt Satz 4.24 genauso auch für andere (abgeschlossene) Zielintervalle als $[0, 1]$.
 (b) Das Lemma von Urysohn ist allein schon deswegen interessant, weil es auf geeigneten Räumen die Existenz (vieler) nicht-konstanter stetiger Funktionen nach \mathbb{R} sicherstellt: Ist X z. B. ein normaler Hausdorff-Raum mit mehr als einem Punkt, so gibt es nach Lemma 4.5 (b) und Satz 4.24 zu je zwei verschiedenen Punkten $a, b \in X$ eine stetige Funktion $f: X \rightarrow I$ mit $f(a) = 0$ und $f(b) = 1$. Ist X darüber hinaus zusammenhängend, bedeutet dies nach Aufgabe 3.10 sogar, dass f dann jeden Wert in I annehmen und X damit insbesondere überabzählbar sein muss.
 (c) Satz 4.24 ist in gewissem Sinne „dual“ zur Situation beim Zusammenhang in Kapitel 3: Der Wegzusammenhang in Definition 3.1 (a) untersucht zu einem topologischen Raum X die Existenz von stetigen Abbildungen $f: I \rightarrow X$ mit vorgegebenen Bildern von $0, 1 \in I$, die Aussage aus Satz 4.24 (b) dagegen stetige Abbildungen $f: X \rightarrow I$ mit vorgegebenen Urbildern von 0 und 1 . Beide Konzepte verwenden also einen speziellen Beispielraum (nämlich I mit der Standardtopologie) und erscheinen dadurch vielleicht nicht besonders natürlich, haben überraschenderweise aber eine enge Beziehung zu einer einfachen, allein durch offene und abgeschlossene Mengen formulierbaren Eigenschaft: die erstere zum Zusammenhang (siehe Definition 3.1 (b) und Satz 3.4), die letztere ist nach Satz 4.24 sogar äquivalent zur Normalität.

Eine interessante Konsequenz aus dem Lemma von Urysohn ist die folgende, noch etwas stärkere Aussage über die Fortsetzbarkeit stetiger Funktionen.

Satz 4.26 (Fortsetzungssatz von Tietze). *Für einen topologischen Raum X sind äquivalent:*

- (a) X ist normal.
 (b) Jede stetige Funktion $f: A \rightarrow I$ von einer abgeschlossenen Menge $A \subset X$ in das Einheitsintervall I lässt sich zu einer stetigen Funktion $\tilde{f}: X \rightarrow I$ fortsetzen (d. h. es gibt eine stetige Funktion $\tilde{f}: X \rightarrow I$ mit $\tilde{f}|_A = f$).

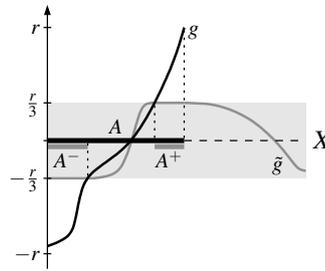
Beweis. Auch bei diesem Satz kommt es natürlich nicht darauf an, welches abgeschlossene reelle Intervall wir als Zielbereich der Funktionen nehmen (siehe Bemerkung 4.25 (a)). Da es im folgenden Beweis etwas praktischer ist, verwenden wir daher als Zielintervall $[-1, 1]$ statt I .

„(a) \Rightarrow (b)“: Es sei $A \subset X$ abgeschlossen. Wir geben zunächst ein Verfahren an, wie man zu einer gegebenen stetigen Funktion $g: A \rightarrow [-r, r]$ für ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ eine „Näherungsfortsetzung“ finden

kann – darunter wollen wir eine stetige Funktion

$$\tilde{g}: X \rightarrow \left[-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}\right] \quad \text{mit} \quad |g(x) - \tilde{g}(x)| \leq \frac{2r}{3} \quad \text{für alle } x \in A \quad (1)$$

verstehen. In der Tat ist eine solche Näherungsfortsetzung schnell konstruiert: Die Mengen $A^- := g^{-1}([-r, -\frac{r}{3}])$ und $A^+ := g^{-1}([\frac{r}{3}, r])$ sind disjunkt und nach Satz 2.4 (d) abgeschlossen in A , mit Aufgabe 1.10 (c) also auch in X . Nach Satz 4.24 (mit Bemerkung 4.25 (a)) gibt es damit aufgrund der Normalität von X wie im Bild rechts ein stetiges $\tilde{g}: X \rightarrow [-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}]$ mit $\tilde{g}|_{A^-} = -\frac{r}{3}$ und $\tilde{g}|_{A^+} = \frac{r}{3}$, und diese erfüllt offensichtlich die oben genannten Bedingungen (1): Nach Konstruktion liegen für alle $x \in A$ sowohl $g(x)$ als auch $\tilde{g}(x)$ im gleichen der drei Intervalle $[-r, -\frac{r}{3}]$, $[-\frac{r}{3}, \frac{r}{3}]$ und $[\frac{r}{3}, r]$.



Auf diese Art konstruieren wir nun zur ursprünglich gegebenen Funktion $f: A \rightarrow [-1, 1]$ eine Näherungsfortsetzung $\tilde{f}_0: X \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, dann zum Fehler $f - \tilde{f}_0: A \rightarrow [-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ eine Näherungsfortsetzung $\tilde{f}_1: X \rightarrow [-\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}]$ mit $f - \tilde{f}_0 - \tilde{f}_1: A \rightarrow [-\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}]$, und letztlich rekursiv für alle $n \in \mathbb{N}$ stetige Funktionen

$$\tilde{f}_n: X \rightarrow \left[-\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n, \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] \quad (2)$$

$$\text{mit} \quad |f(x) - \tilde{f}_0(x) - \dots - \tilde{f}_n(x)| \leq \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{für alle } x \in A. \quad (3)$$

Wegen (2) gilt für alle $x \in X$ nach der Formel für die geometrische Reihe [G2, Beispiel 7.3 (a)]

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\tilde{f}_n(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 1. \quad (4)$$

Die Reihe über die Funktionen \tilde{f}_n ist also absolut und gleichmäßig konvergent. Wir können somit $\tilde{f}(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{f}_n(x)$ für $x \in X$ setzen und erhalten eine reelle Funktion \tilde{f} auf X , die ebenfalls wegen der Abschätzung (4) nur Werte im Intervall $[-1, 1]$ annimmt. Genau wie im Fall von Folgen von Funktionen zwischen metrischen Räumen in den „Grundlagen der Mathematik“ zeigt man, dass \tilde{f} als gleichmäßiger Grenzwert stetiger Funktionen stetig ist [G2, Satz 8.39 und Bemerkung 24.25 (b)]. Gehen wir schließlich in (3) zum Grenzwert $n \rightarrow \infty$ über, sehen wir, dass $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in A$ gilt, also \tilde{f} wie gewünscht eine stetige Fortsetzung von f ist.

05

„(b) \Rightarrow (a)“: Es seien $A, B \subset X$ abgeschlossene Mengen mit $A \cap B = \emptyset$. Dann ist die Funktion

$$f: A \cup B \rightarrow [-1, 1], \quad x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{für } x \in A \\ 1 & \text{für } x \in B \end{cases}$$

nach Satz 2.4 (b) stetig, da alle Urbilder von f die in $A \cup B$ offenen Mengen \emptyset, A, B oder $A \cup B$ sind. Also können wir f nach unserer Annahme zu einer stetigen Funktion $\tilde{f}: X \rightarrow [-1, 1]$ fortsetzen, und $U := \tilde{f}^{-1}(\mathbb{R}_{<0})$ und $V := \tilde{f}^{-1}(\mathbb{R}_{>0})$ sind wie gewünscht offene Mengen mit $U \supset A, V \supset B$ und $U \cap V = \emptyset$. \square

Bei Bedarf lässt sich aus dem Fortsetzungssatz 4.26 schließlich auch noch die Annahme beseitigen, dass wir nur beschränkte Funktionen in ein vorgegebenes Intervall betrachten. Wir erhalten so die folgende alternative Form dieses Satzes:

Folgerung 4.27. *Ein topologischer Raum X ist genau dann normal, wenn jede stetige Abbildung $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer abgeschlossenen Menge $A \subset X$ zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann.*

Beweis. Es sei zunächst X normal. Ist $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ dann eine stetige Funktion auf einer abgeschlossenen Menge A , so können wir die stetige und beschränkte Funktion $g := \arctan f: A \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ betrachten und nach Satz 4.26 zu einer stetigen Funktion $\tilde{g}: X \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ fortsetzen.

Beachte jedoch, dass diese Fortsetzung außerhalb von A die Werte $\pm \frac{\pi}{2}$ annehmen könnte, so dass wir nicht einfach $\tan \tilde{g}$ als Fortsetzung von f wählen können. Wir können nach Satz 4.24 aber eine

stetige Funktion $\tilde{h}: X \rightarrow [0, 1]$ finden mit $\tilde{h}|_{\tilde{g}^{-1}(\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\})} = 0$ und $\tilde{h}|_A = 1$. Dann nimmt $\tilde{g} \cdot \tilde{h}$ nur Werte in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ an und stimmt auf A mit \tilde{g} und damit auch mit g überein, so dass nun wie gewünscht $\tilde{f} := \tan(\tilde{g} \cdot \tilde{h})$ eine stetige Fortsetzung von f ist.

Die Rückrichtung zeigt man genauso wie in Satz 4.26. □

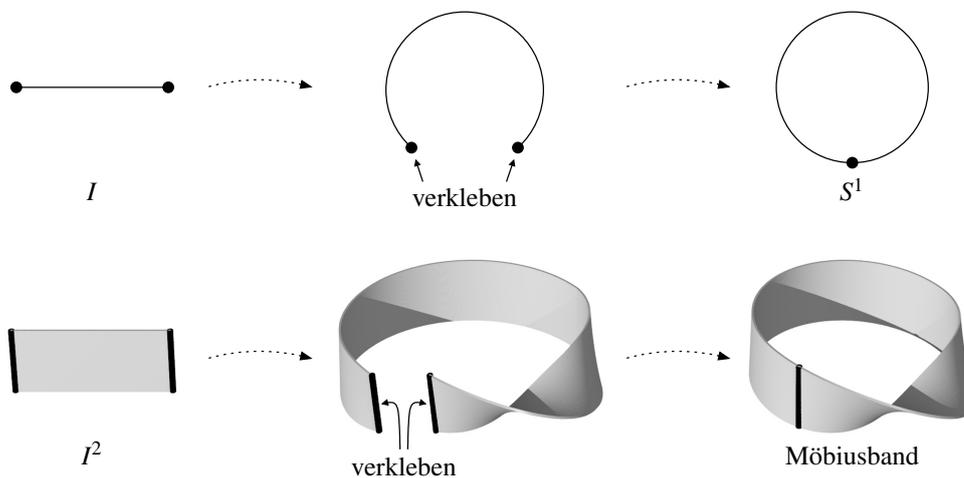
Aufgabe 4.28. Es sei $A \subset [0, 1]$ die Menge aller Zahlen, die eine Dezimaldarstellung aus nur den Ziffern 0 und 1 besitzen. Im Folgenden schreiben wir eine solche Zifferndarstellung zur Basis 10 als $(0, a_1 a_2 a_3 \dots)_{10}$ mit $a_1, a_2, a_3 \dots \in \{0, 1\}$.

- (a) Man zeige: Die Abbildung $f: A \rightarrow I$, $(0, a_1 a_2 a_3 \dots)_{10} \mapsto (0, a_1 a_2 a_3 \dots)_2$, die eine Zahlendarstellung zur Basis 10 als eine zur Basis 2 uminterpretiert, ist stetig.
- (b) Zeige, dass es eine stetige Abbildung $g: I \rightarrow I$ gibt mit $g(A) = I$.
- (c) Benutze die Idee aus (a) und (b), um einen alternativen Beweis für die Existenz von Peano-Kurven, also von stetigen, surjektiven Abbildungen von I nach I^2 anzugeben (siehe Satz 2.18).

(Wer bereits die „Maß- und Integrationstheorie“ gehört hat, kann (b) auch als Beispiel dafür auffassen, dass auch schon im eindimensionalen Lebesgue-Maß eine stetige Funktion eine beschränkte Nullmenge auf eine (messbare) Menge mit positivem Maß abbilden kann.)

5. Quotientenräume

Bevor wir unsere Untersuchung topologischer Räume fortsetzen, wollen wir in diesem Kapitel zunächst einmal viele neue Beispiele solcher Räume kennen lernen, indem wir Konstruktionen angeben, mit denen man aus bekannten topologischen Räumen neue gewinnen kann. Im Gegensatz zu unseren bisher betrachteten Beispielen geht es dabei weniger um Räume mit ungewöhnlich konstruierten Topologien, sondern hauptsächlich um solche, die sich durch „Verkleben“ aus einfachen Grundbausteinen zusammensetzen lassen. Anschaulich erhält man z. B. wie im Bild unten eine Kreislinie, wenn man die Eckpunkte des Einheitsintervalls miteinander verklebt, und ein sogenanntes Möbiusband (siehe Beispiel 5.9 (b)), wenn man im Einheitsquadrat I^2 die linke mit der rechten Kante mit entgegengesetzter Orientierung verklebt.



Wie kann man ein solches Verkleben nun mathematisch exakt beschreiben? Ihr wisst aus den Anfängervorlesungen bereits, wie dies zunächst erst einmal mengentheoretisch möglich ist: Elemente einer Menge miteinander zu identifizieren bedeutet einfach, eine Äquivalenzrelation auf dieser Menge zu betrachten und dann zur Menge der Äquivalenzklassen überzugehen. Für die Kreislinie oben müssten wir also z. B. die Äquivalenzrelation \sim auf dem Einheitsintervall I betrachten, für die $0 \sim 1$ gilt, ansonsten aber jeder Punkt in seiner eigenen Äquivalenzklasse liegt. Die Menge I/\sim der Äquivalenzklassen beschreibt dann den zusammengeklebten Raum, in dem 0 und 1 miteinander identifiziert wurden. Die natürliche Restklassenabbildung $I \rightarrow I/\sim$ bildet dabei jeden Punkt des ursprünglichen Intervalls auf den entsprechenden Punkt auf der Kreislinie nach dem Zusammenkleben ab. In der Tat ist diese topologische Sichtweise wahrscheinlich eine der anschaulichsten Arten, wie man sich Äquivalenzrelationen bzw. Äquivalenzklassen vorstellen kann.

Bevor wir mit der Untersuchung derartiger Räume beginnen, wollen wir zuerst noch eine Konstruktion angeben, mit der wir Äquivalenzrelationen später deutlich einfacher hinschreiben können. Betrachten wir z. B. noch einmal das Verkleben der beiden Randpunkte des Einheitsintervalls oben, so haben wir dafür eine Äquivalenzrelation auf I mit $0 \sim 1$ benötigt. Dies alleine – also die Relation \sim auf I , für die genau $0 \sim 1$ und sonst immer $x \not\sim y$ gilt – ist aber natürlich noch keine Äquivalenzrelation, da sie weder reflexiv noch symmetrisch ist. Dies lässt sich jedoch mit der folgenden Konstruktion einfach reparieren:

Konstruktion 5.1 (Erzeugte Äquivalenzrelationen). Es sei \sim eine beliebige Relation auf einer Menge X . Wir definieren auf X eine neue Relation \approx , indem wir für alle x, y setzen

$$x \approx y \quad :\Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ und } x_0, \dots, x_n \in X, \text{ so dass } x_0 = x \text{ und } x_n = y \text{ ist} \\ \text{und für alle } i = 1, \dots, n \text{ gilt, dass } x_{i-1} \sim x_i \text{ oder } x_i \sim x_{i-1}.$$

Man prüft leicht nach, dass \approx eine Äquivalenzrelation ist. In der Tat ist es die kleinste Äquivalenzrelation, bei der für alle $x, y \in X$ mit $x \sim y$ auch $x \approx y$ gilt – d. h. die Relation, die man erhält, indem man zu \sim nur die Relationen mit hinzunimmt, die man unbedingt benötigt, um die Ausgangsrelation reflexiv, symmetrisch und transitiv zu machen. Ist also \sim bereits eine Äquivalenzrelation, so stimmt \approx mit \sim überein.

Man nennt \approx die von \sim **erzeugte Äquivalenzrelation**. In dieser Situation werden wir die Menge X/\approx ihrer Äquivalenzklassen im Folgenden auch mit X/\sim bezeichnen, und die zugehörige Restklassenabbildung mit $\pi: X \rightarrow X/\sim$.

Beispiel 5.2. Wie im oben erwähnten Beispiel sei \sim die Relation auf dem Einheitsintervall I , für die nur $0 \sim 1$, also $x \not\sim y$ für alle $(x, y) \neq (0, 1)$ gilt. Dann ist die davon erzeugte Äquivalenzrelation \approx gegeben durch

$$x \approx y \quad \Leftrightarrow \quad x = y \quad \text{oder} \quad (x, y) = (1, 0) \quad \text{oder} \quad (x, y) = (0, 1).$$

Beachte, dass wir damit bereits eine wohldefinierte und bijektive Abbildung

$$f: I/\sim \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}, \quad \bar{x} \mapsto e^{2\pi i x}$$

haben, die das Verkleben des Einheitsintervalls an den Randpunkten beschreibt und wie gewünscht die Kreislinie ergibt. Natürlich möchten wir diese Abbildung nun aber auch noch als Homöomorphismus ansehen können und müssen daher zuerst einmal sagen, welche Topologie wir dem Raum I/\sim geben wollen. Es stellt sich heraus, dass es für die Topologie auf einer solchen Menge von Äquivalenzklassen eine sehr natürliche Wahl gibt: die sogenannte Quotiententopologie, die wir jetzt einführen wollen.

Lemma und Definition 5.3 (Quotiententopologie). *Es seien \sim eine (Äquivalenz-)Relation auf einem topologischen Raum X sowie $\pi: X \rightarrow X/\sim$ die zugehörige Restklassenabbildung. Dann ist*

$$\mathcal{T} := \{U \subset X/\sim : \pi^{-1}(U) \text{ ist offen in } X\}$$

eine Topologie auf X/\sim . Sie wird **Quotiententopologie** genannt und ist die Standardtopologie auf derartigen Mengen von Äquivalenzklassen. Man bezeichnet X/\sim mit dieser Topologie auch als einen **Quotientenraum**.

Beweis. Wir müssen die Eigenschaften einer Topologie aus Definition 1.1 nachprüfen.

- (a) Da $\pi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $\pi^{-1}(X/\sim) = X$ offen in X sind, sind \emptyset und X/\sim nach Definition in \mathcal{T} .
- (b) Für alle i in einer Indexmenge I seien $U_i \in \mathcal{T}$, also $\pi^{-1}(U_i)$ offen in X . Dann ist

$$\pi^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) = \bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i)$$

als Vereinigung offener Mengen offen in X , und damit liegt $\bigcup_{i \in I} U_i$ nach Definition in \mathcal{T} .

- (c) Dies folgt analog zu (b) aus der Gleichung

$$\pi^{-1}(U \cap V) = \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V). \quad \square$$

Bemerkung 5.4 (Offene und abgeschlossene Mengen in der Quotiententopologie). Definition 5.3 besagt mit den obigen Notationen also, dass eine Teilmenge $U \subset X/\sim$ genau dann offen ist, wenn ihr Urbild $\pi^{-1}(U)$ in X offen ist. Ein analoges Kriterium gilt dann automatisch auch für abgeschlossene Mengen: Eine Teilmenge $A \subset X/\sim$ ist ja genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement $(X/\sim) \setminus A$ offen ist, was nach Definition nun genau dann gilt, wenn $\pi^{-1}((X/\sim) \setminus A) = X \setminus \pi^{-1}(A)$ offen, also $\pi^{-1}(A)$ abgeschlossen ist.

Die Definition der Quotiententopologie ist außerdem so gemacht, dass es sehr einfach ist, stetige Funktionen von Quotientenräumen in andere topologische Räume zu beschreiben:

Lemma 5.5 (Stetige Abbildungen von Quotienten). *Es sei $\pi: X \rightarrow X/\sim$ die Restklassenabbildung für eine (Äquivalenz-)Relation \sim auf einem topologischen Raum X . Dann gilt:*

- (a) π ist stetig.
- (b) Eine Abbildung $f: X/\sim \rightarrow Y$ in einen weiteren topologischen Raum Y ist genau dann stetig, wenn die Verkettung $f \circ \pi: X \rightarrow Y$ stetig ist.

Beweis.

- (a) Ist $U \subset X/\sim$ offen, so bedeutet dies nach Definition der Quotiententopologie gerade, dass $\pi^{-1}(U)$ offen in X ist. Damit ist π stetig nach Satz 2.4 (b).
- (b) Nach Satz 2.4 (b) ist f genau dann stetig, wenn für alle offenen Teilmengen $U \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in X/\sim ist. Nach Definition 5.3 ist dies aber äquivalent dazu, dass $\pi^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ \pi)^{-1}(U)$ offen in X ist für alle diese U , und damit wiederum nach Satz 2.4 (b) zur Stetigkeit von $f \circ \pi$. \square

Bemerkung 5.6 (Konstruktion stetiger Abbildungen von Quotienten). Lemma 5.5 (b) kann man auch als Konstruktionsmöglichkeit für Abbildungen interpretieren, deren Startraum ein Quotientenraum ist: Wollen wir eine stetige Abbildung f von einem Quotienten X/\sim in einen anderen Raum Y angeben, so kann man dafür einfach eine stetige Abbildung $g: X \rightarrow Y$ hinschreiben, die auf den Äquivalenzklassen konstant ist. Eine solche Abbildung liefert dann nämlich eine wohldefinierte Funktion $f: X/\sim \rightarrow Y$, $\bar{x} \mapsto g(x)$, die natürlich $g = f \circ \pi$ erfüllt und daher nach Lemma 5.5 (b) stetig ist.

Bemerkung 5.7 (Finaltopologien). Analog zu Bemerkung 2.11 kann man auch hier leicht nachprüfen, dass die Quotiententopologie die feinste Topologie auf X/\sim ist, für die die Restklassenabbildung π stetig ist, und dass sie durch die Eigenschaft aus Lemma 5.5 (b) eindeutig charakterisiert ist. Man nennt diese Eigenschaft daher die *universelle Eigenschaft der Quotiententopologie*.

Auch dies ist ein Spezialfall einer viel allgemeineren Konstruktion: Hat man eine Familie topologischer Räume $(X_i)_{i \in J}$, eine Menge Y und Abbildungen $\pi_i: X_i \rightarrow Y$ für alle $i \in J$, so definieren diese Daten auf Y die sogenannte *Finaltopologie* auf Y als die feinste Topologie, für die alle π_i stetig sind, oder (äquivalent dazu) als die eindeutige Topologie, für die eine Abbildung $f: Y \rightarrow Z$ in einen topologischen Raum Z genau dann stetig ist, wenn alle Verkettungen $f \circ \pi_i: X_i \rightarrow Z$ stetig sind. Unser Fall der Quotiententopologie ergibt sich hieraus also, wenn man nur einen Raum $X = X_i$ hat, $Y = X/\sim$ und $\pi = \pi_i$ die Restklassenabbildung ist.

Die Konstruktion der Finaltopologien ist damit also exakt dual zu der der Initialtopologien in Bemerkung 2.11.

Eine weitere unmittelbare Folgerung aus Lemma 5.5 ist, dass sich einige unserer bisher eingeführten Eigenschaften topologischer Räume von einem ursprünglichen Raum X auf einen zugehörigen Quotientenraum übertragen.

Folgerung 5.8. *Es seien \sim eine (Äquivalenz-)Relation auf einem topologischen Raum X und X/\sim der zugehörige Quotientenraum.*

- (a) Ist X wegzusammenhängend, so auch X/\sim .
- (b) Ist X zusammenhängend, so auch X/\sim .
- (c) Ist X kompakt, so auch X/\sim .

Beweis. Da sich alle drei angegebenen Eigenschaften auf Bilder unter stetigen Abbildungen übertragen (siehe Lemma 3.6 und Satz 4.10 (a)), ergeben sich die Behauptungen sofort aus der Stetigkeit der surjektiven Restklassenabbildung $\pi: X \rightarrow X/\sim$ gemäß Lemma 5.5 (a). \square

Die Trennungseigenschaften, also die Hausdorff-Eigenschaft und die Normalität, übertragen sich jedoch nicht ohne weiteres auf Quotientenräume. Wir werden dies später noch untersuchen (siehe Satz 5.19).

Beispiel 5.9. Mit unseren Vorarbeiten können wir nun sehr einfach einige interessante Beispiele von Quotientenräumen konstruieren.

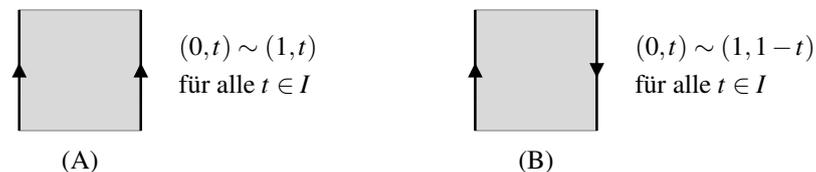
- (a) Wir betrachten noch einmal wie in Beispiel 5.2 die durch $0 \sim 1$ auf dem Einheitsintervall I gegebene Relation. Die dort schon als bijektiv erkannte Abbildung

$$f: I/\sim \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}, \bar{x} \mapsto e^{2\pi i x}$$

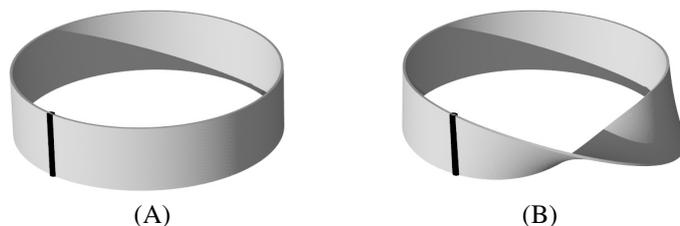
des Quotientenraums auf die Kreislinie ist nach Lemma 5.5 (b) stetig, da die zugehörige Abbildung $I \rightarrow S^1$, $x \mapsto e^{2\pi i x}$ stetig ist. Damit ist sie nach Folgerung 4.14 aber auch ein Homöomorphismus, da I/\sim nach Folgerung 5.8 (c) kompakt und S^1 als metrischer Raum natürlich ein Hausdorff-Raum ist (siehe Beispiel 4.3 (a)). Durch das Verkleben der Randpunkte von I erhalten wir also tatsächlich wie in der Einleitung zu diesem Kapitel angegeben die Kreislinie S^1 .

Beachte, dass dies aufgrund der Rotationssymmetrie von S^1 insbesondere bedeutet, dass der Verklebepunkt hinterher „topologisch genauso aussieht“ wie alle anderen Punkte auf der Kreislinie – das Verkleben erzeugt also in der Tat genau die topologische Struktur, die man sich wünschen würde.

- (b) Als zweidimensionales Beispiel betrachten wir nun das Einheitsquadrat I^2 und verkleben darin die linke mit der rechten Kante. Wir können dies mit gleicher oder entgegengesetzter Orientierung dieser Kanten tun, also die im folgenden Bild angegebenen Relationen auf I^2 verwenden.

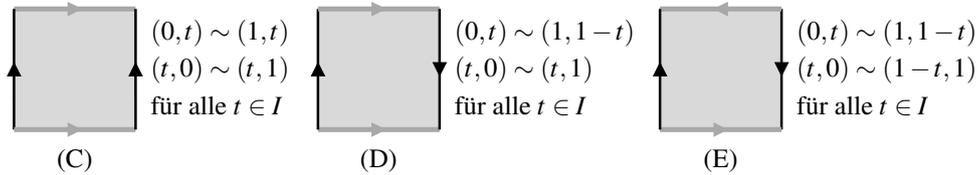


Die dementsprechend zusammengeklebten Räume I^2/\sim zeigt das Bild unten, wobei die dunkel eingezeichnete Linie die Klebekante ist. Im Fall (A) erhält man einen Zylindermantel $S^1 \times I$ (mit einer analogen Begründung wie in (a)). Den im Fall (B) konstruierten Raum haben wir schon am Anfang dieses Kapitels betrachtet: Man nennt ihn das **Möbiusband**. Es unterscheidet sich vom „unverdrehten Band“ (A) anschaulich dadurch, dass diese Fläche nicht orientierbar ist: Während das Band in (A) eine Außen- und eine Innenseite hat, wird die Außenseite beim Möbiusband (B) zur Innenseite, wenn man einmal um das Band herum läuft. Dieser sehr anschauliche Begriff der Orientierbarkeit einer Fläche ist mathematisch jedoch nur schwer zu fassen, wir werden ihn daher in dieser Vorlesung nicht exakt einführen oder untersuchen.



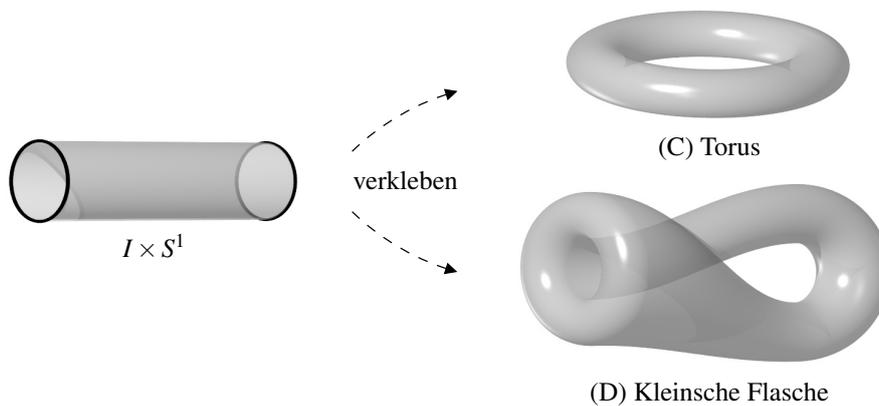
Beachte, dass das Möbiusband auf diese Art als Quotientenraum *definiert* ist, und dass diese Definition in der Tat sehr einfach ist – es wäre viel umständlicher gewesen, einen derartigen Raum als Teilraum von \mathbb{R}^3 durch Gleichungen oder eine Parametrisierung anzugeben.

- (c) Verkleben wir in (b) zusätzlich auch noch die untere mit der oberen Kante in I^2 , so haben wir hierfür drei Möglichkeiten: Wir können wie in (C) unten beide Kantenpaare mit gleicher Orientierung verkleben, wie in (D) eines mit gleicher und eines mit entgegengesetzter Orientierung, oder wie in (E) beide mit entgegengesetzter Orientierung.

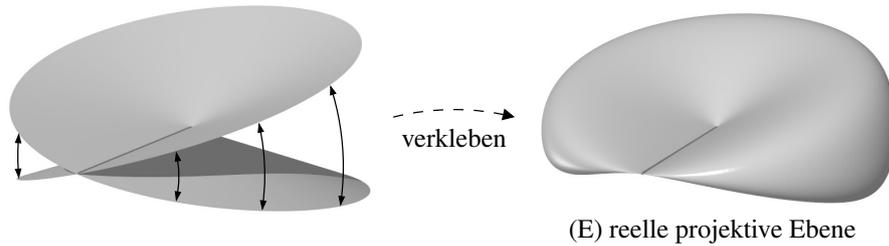


In den Fällen (C) und (D) können wir zunächst einmal die obere mit der unteren Kante verkleben und erhalten wie in (b) einen Zylindermantel $I \times S^1$ (siehe Bild unten links). Identifizieren wir dort nun in (C) noch den linken mit dem rechten Kreisrand mit der gleichen Orientierung, so erhalten wir einen **Torus**. Mit der gleichen Begründung wie in (a) sieht man, dass dieser Raum homöomorph zu $S^1 \times S^1$ ist.

Bei (D) dagegen müssen wir die beiden Kreisränder des Zylindermantels in entgegengesetzter Orientierung identifizieren. Formal als Quotientenraum ist dies natürlich überhaupt kein Problem; als Teilraum von \mathbb{R}^3 kann man die resultierende Fläche jedoch nicht mehr korrekt darstellen – dies ist nur mit „Selbstdurchdringungen“ wie im Bild unten rechts möglich. Man bezeichnet diese Fläche als **Kleinsche Flasche**. Sie lässt sich in den \mathbb{R}^n nur für $n \geq 4$ einbetten und ist wie das Möbiusband ein weiteres Beispiel für einen topologischen Raum, der sich als Quotientenraum viel einfacher definieren lässt als durch Gleichungen oder eine Parametrisierung in \mathbb{R}^n .



Der Quotientenraum in (E) lässt sich am besten geometrisch verstehen, wenn man bedenkt, dass hier jeder Randpunkt von I^2 mit seinem gegenüberliegenden Punkt verklebt wird, und dass das Einheitsquadrat I^2 nach Beispiel 2.15 (b) homöomorph zum Einheitskreis $D^2 \subset \mathbb{C}$ ist. Wir betrachten also letztlich den Raum D^2/\sim mit der Relation $z \sim -z$ für alle $z \in S^1 \subset D^2$. Um diesen Raum zeichnen zu können, stellen wir die Kreisscheibe D^2 zunächst wie im Bild unten links so dar, dass wir jeden Punkt mit Polarkoordinaten r und φ an der Stelle mit Polarkoordinaten r und 2φ malen, so dass wir also jeden Punkt des Kreises (mit Ausnahme des Nullpunkts) zweimal erhalten.



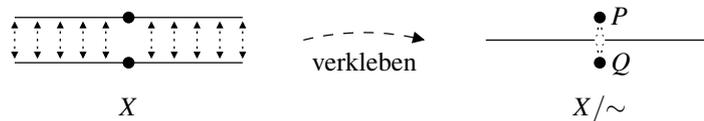
Damit wir dabei diese beiden Kopien der Punkte unterscheiden können, haben wir sie übereinander gezeichnet und eine Fläche erhalten, die wie eine zweifache Überdeckung der Kreisscheibe aussieht – was in \mathbb{R}^3 wieder nur mit einer Selbstdurchdringung geht (die im Bild durch die graue Linie dargestellt ist).

Gegenüberliegende Punkte auf dem Rand der Kreisscheibe D^2 liegen in dieser Darstellung nun direkt übereinander. Wir müssen jetzt also nur noch jeden Punkt des oberen Randes mit dem entsprechenden Punkt des unteren Randes verkleben und erhalten so die im Bild oben rechts gezeichnete Fläche, die immer noch eine Selbstdurchdringung hat. Man bezeichnet sie als die **reelle projektive Ebene**. Sie ist ein Spezialfall einer allgemeinen Konstruktion sogenannter projektiver Räume, die wir in Konstruktion 5.24 bzw. Aufgabe 5.25 noch kennenlernen werden.

- (d) Als letzte Konstruktion eines Quotientenraumes wollen wir nun noch ein ganz anderes Beispiel betrachten. Dazu starten wir mit der Menge $X = I \times \{0, 1\} \subset \mathbb{R}^2$, also zwei disjunkten Einheitsintervallen, und betrachten darauf die Relation

$$(t, 0) \sim (t, 1) \quad \text{für alle } t \in I \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\},$$

d. h. wir verkleben die beiden Intervalle in allen sich entsprechenden Punkten, mit Ausnahme des mittleren Punktes $\frac{1}{2} \in I$. Wir erhalten auf diese Art für X/\sim also wie im Bild unten ein „Intervall mit zwei Mittelpunkten P und Q “.



Dieser Raum verhält sich ganz anders als die Beispiele in (a) bis (c): Er ist weder normal noch ein Hausdorff-Raum, da die Punkte P und Q zwar abgeschlossen sind, aber sich nicht durch offene Mengen trennen lassen. Ist nämlich U eine offene Umgebung von P in X/\sim , so ist $\pi^{-1}(U)$ nach Definition 5.3 eine offene Umgebung von $(\frac{1}{2}, 0)$ in X und enthält damit eine offene Kugel $U_\varepsilon(\frac{1}{2}, 0)$ um diesen Punkt. Damit enthält U alle Punkte der Form $(t, 0) = (t, 1)$ für $0 < |t - \frac{1}{2}| < \varepsilon$. Dasselbe gilt aber auch für offene Umgebungen von Q , und zwei solche Mengen können offensichtlich nicht disjunkt sein. Das folgende Bild verdeutlicht dies und zeigt eine offene Umgebung U von P und V von Q in X/\sim , wobei der graue Punkt jeweils nicht in der Umgebung enthalten ist.



Insbesondere bedeutet dies nach Beispiel 4.3 (a), dass dieser Quotientenraum kein metrischer Raum und damit auch für kein n homöomorph zu einem Teilraum von \mathbb{R}^n sein kann. In diesem Sinne sind die Bilder dieses Raumes in der Zeichenebene \mathbb{R}^2 oben also nicht ganz korrekt (sie könnten z. B. suggerieren, dass X/\sim unzusammenhängend ist, was aber nicht der Fall ist).

Bemerkung 5.10 (Durchschnitte kompakter Mengen). Das Intervall mit zwei Mittelpunkten X aus Beispiel 5.9 (d) liefert auch ein einfaches Beispiel dafür, dass Durchschnitte kompakter Teilmengen topologischer Räume im Allgemeinen nicht wieder kompakt sind (siehe Bemerkung 4.13 (b)): Sind $K = \overline{\{(t, 0) : t \in I\}}$ und $L = \overline{\{(t, 1) : t \in I\}}$ in X das Intervall mit nur dem unteren bzw. oberen Mittelpunkt, so ist $K \cong L \cong I$ kompakt, aber $K \cap L \cong I \setminus \{\frac{1}{2}\}$ ist nicht kompakt.

Aufgabe 5.11. Nehmt einen Zylindermantel $X = S^1 \times I \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ und verklebt an einem der beiden Ränder jeden Punkt mit seinem gegenüberliegenden, d. h. betrachtet den Raum X/\sim für die Relation $(z, 1) \sim (-z, 1)$ für alle $z \in S^1$.

Zeigt sowohl durch einen mathematischen Beweis als auch durch Basteln, dass dieser Raum homöomorph zum Möbiusband ist.

Bisher haben wir Quotientenräume immer direkt durch die Angabe einer (Äquivalenz-)Relation auf einem topologischen Raum definiert. In der Praxis treten jedoch oft zwei spezielle Arten auf, wie man die nötige Äquivalenzrelation aus anderen „Verklebedaten“ bekommt: durch Angabe einer Verklebeabbildung bzw. durch Herausteilen einer Gruppenoperation. Diese beiden Konstruktionen wollen wir nun im Rest dieses Kapitels noch untersuchen.

Bei der Angabe einer Verklebeabbildung startet man mit zwei topologischen Räumen X und Y sowie einer stetigen Abbildung $f: A \rightarrow Y$, die auf einer Teilmenge A von X definiert ist. Man möchte als topologischen Raum nun X und Y zusammen nehmen und dadurch verkleben, dass man jeden Punkt $x \in A$ mit seinem Bildpunkt $f(x) \in Y$ identifiziert. Um dies formal exakt hinschreiben zu können, benötigen wir zunächst eine Konstruktion, die das disjunkte Vereinigen der beiden Räume X und Y zu einem neuen Raum beschreibt.

Konstruktion 5.12 (Disjunkte Vereinigungen). Es seien X und Y zwei topologische Räume. Wir definieren die **disjunkte Vereinigung** von X und Y als

$$X \sqcup Y := (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\}) \subset (X \cup Y) \times \{0, 1\}$$

mit der Topologie

$$\mathcal{T} = \{U \sqcup V : U \subset X \text{ offen und } V \subset Y \text{ offen}\}.$$

Letztlich ist diese vielleicht etwas umständlich wirkende Definition nur ein Trick, um dafür zu sorgen, dass X und Y im Raum $X \sqcup Y$ wirklich disjunkt sind, auch wenn sie es als Mengen ursprünglich nicht waren: Wir fügen einfach eine zweite Koordinate hinzu, die für den ersten Raum 0 und für den zweiten Raum 1 ist, so dass alle Punkte von $X \sqcup Y$ eindeutig zu einem der beiden Teilräume gehören – genau wie in Beispiel 5.9 (d), in dem $I \times \{0, 1\} = I \sqcup I$ die disjunkte Vereinigung zweier Einheitsintervalle war.

Im Folgenden werden wir bei der Notation von Punkten in $X \sqcup Y$ in der Regel die zweite Koordinate weglassen, wenn klar ist, ob der Punkt in der ersten oder zweiten Komponente liegen soll.

Aus der Definition der Topologie auf $X \sqcup Y$ folgen unmittelbar einige elementare Eigenschaften:

- (a) Eine Menge $A \sqcup B \subset X \sqcup Y$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $A \subset X$ und $B \subset Y$ abgeschlossen sind.
- (b) $X \sqcup Y$ ist (für nicht-leere X und Y) immer unzusammenhängend, da $X \sqcup \emptyset$ und $\emptyset \sqcup Y$ offen sind und sich disjunkt zu $X \sqcup Y$ vereinigen.
- (c) Die Einbettungsabbildungen $X \rightarrow X \sqcup Y$ und $Y \rightarrow X \sqcup Y$ sind mit unserer Definition der Topologie auf $X \sqcup Y$ natürlich stetig.

Eine Abbildung $f: X \sqcup Y \rightarrow Z$ in einen dritten topologischen Raum Z hat stets die Form

$$f: X \sqcup Y \rightarrow Z, x \mapsto \begin{cases} f_X(x) & \text{falls } x \in X, \\ f_Y(x) & \text{falls } x \in Y \end{cases}$$

für zwei Abbildungen $f_X: X \rightarrow Z$ und $f_Y: Y \rightarrow Z$, und ist genau dann stetig, wenn f_X und f_Y es sind. In der Tat ist \mathcal{T} wie in Bemerkung 5.7 genau die Finaltopologie auf $X \sqcup Y$ für die beiden Einbettungsabbildungen $X \rightarrow X \sqcup Y$ und $Y \rightarrow X \sqcup Y$.

Definition 5.13 (Verkleben entlang von Abbildungen). Es seien X und Y topologische Räume sowie $f: A \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung von einer Teilmenge $A \subset X$ nach Y .

- (a) Wir betrachten auf der disjunkten Vereinigung $X \sqcup Y$ die Relation \sim mit $x \sim f(x)$ für alle $x \in A$ und setzen

$$X \cup_f Y := (X \sqcup Y) / \sim,$$

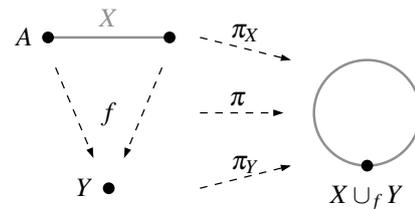
verkleben also jeden Punkt $x \in A \subset X$ mit seinem Bild $f(x) \in Y$. Wie üblich werden wir die zugehörige Restklassenabbildung mit $\pi: X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$ bezeichnen, ihre Verkettung mit den natürlichen Einbettungen $X \rightarrow X \sqcup Y$ und $Y \rightarrow X \sqcup Y$ mit

$$\pi_X: X \rightarrow X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y \quad \text{bzw.} \quad \pi_Y: Y \rightarrow X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y.$$

Nach Konstruktion ist dann offensichtlich $\pi_X|_A = \pi_Y \circ f$, denn für alle $x \in A$ ist $(\pi_X|_A)(x) = \bar{x}$ und $(\pi_Y \circ f)(x) = \overline{f(x)}$.

- (b) Ist Y der einpunktige Raum und dementsprechend f die konstante Abbildung (so dass also alle Punkte in A miteinander identifiziert werden), so schreiben wir den Raum $X \cup_f Y$ auch als X/A und sagen, dass er aus X durch **Zusammenschlagen** von A auf einen Punkt entsteht.

Beispiel 5.14. Für den Raum $I/\{0, 1\}$, der aus dem Einheitsintervall durch Zusammenschlagen der beiden Randpunkte auf einen Punkt entsteht, benötigen wir mit den obigen Notationen wie im Bild rechts $X = I$, $A = \{0, 1\}$, den einpunktigen Raum Y und die konstante Abbildung $f: A \rightarrow Y$. Da wir genau die drei Punkte $0, 1 \in A$ und Y miteinander identifizieren, ist der entstehende Raum $X \cup_f Y$ offensichtlich wie in Beispiel 5.2 bijektiv zur Kreislinie S^1 . Wir werden in Beispiel 5.17 (a) sehen, dass $I/\{0, 1\}$ auch tatsächlich homöomorph zu S^1 ist.



Bemerkung 5.15. Beachte, dass die Konstruktion von $X \cup_f Y$ in Definition 5.13 (a) nicht symmetrisch in X und Y ist. In der Tat kann die dort betrachtete Relation zwei Punkte $x_1, x_2 \in X$ miteinander identifizieren (nämlich wenn $x_1, x_2 \in A$ und $f(x_1) = f(x_2)$ gilt), aber nie zwei Punkte in Y . Man sollte sich X daher wie in Beispiel 5.14 als den Starraum vorstellen, in dem man etwas verkleben möchte, A als die „Klebestelle“ in diesem Raum, und Y als das Bild von A nach dem Verkleben.

Bemerkung 5.16 (Offene Mengen in $X \cup_f Y$). Nach Definition 5.3 der Quotiententopologie ist eine Menge $U \subset X \cup_f Y$ genau dann offen, wenn ihr Urbild $\pi^{-1}(U)$ in $X \sqcup Y$ offen ist, also wenn $\pi_X^{-1}(U) \subset X$ und $\pi_Y^{-1}(U) \subset Y$ offen sind (siehe Konstruktion 5.12).

Dieses Kriterium lässt sich oft noch etwas vereinfachen. Falls f nämlich surjektiv ist, so gilt

$$\pi_Y^{-1}(U) = f(f^{-1}(\pi_Y^{-1}(U))) = f((\pi_Y \circ f)^{-1}(U)) \stackrel{5.13(a)}{=} f((\pi_X|_A)^{-1}(U)) = f(A \cap \pi_X^{-1}(U)).$$

Ist dann also $\pi_X^{-1}(U)$ offen in X und damit $A \cap \pi_X^{-1}(U)$ offen in A , so können wir daraus bereits auf die Offenheit von $\pi_Y^{-1}(U)$ in Y schließen, wenn wir wissen, dass $f: A \rightarrow Y$ offene Mengen auf offene Mengen abbildet – derartige Abbildungen heißen *offen*. In der Praxis haben Verklebeabbildungen oft diese Eigenschaft, z. B. wenn Y diskret oder f ein lokaler Homöomorphismus ist, also eine Umgebung von jedem Punkt homöomorph auf eine Umgebung des Bildpunktes abbildet.

Zusammenfassend sehen wir also, dass eine Teilmenge $U \subset X \cup_f Y$ im Fall einer surjektiven und offenen Verklebeabbildung f genau dann offen ist, wenn $\pi_X^{-1}(U)$ offen in X ist.

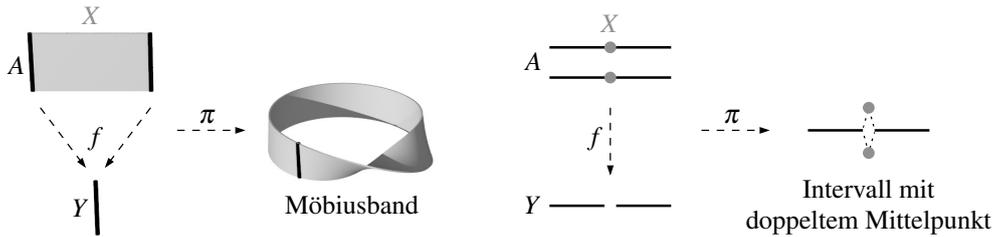
Beispiel 5.17.

- (a) Der Raum $I/\{0, 1\}$ aus Beispiel 5.14 ist homöomorph zu S^1 : Die Verklebeabbildung ist hier trivialerweise surjektiv und offen, und damit ist eine Teilmenge $U \subset I/\{0, 1\}$ nach Bemerkung 5.16 genau dann offen, wenn ihr Urbild in I es ist – was exakt die gleiche Topologie ist wie in Beispiel 5.9 (a).

- (b) Auch die anderen Räume aus Beispiel 5.9 können wir mit Hilfe einer Verklebeabbildung erhalten, z. B. wie im Bild unten das Möbiusband für $X = I^2$, $A = \{0, 1\} \times I$, $Y = I$ und die Verklebeabbildung

$$f: A \rightarrow Y, (t, x) \mapsto \begin{cases} x & \text{für } t = 0, \\ 1 - x & \text{für } t = 1, \end{cases}$$

und das Intervall mit zwei Mittelpunkten aus $X = I \sqcup I$, $A = (I \setminus \{\frac{1}{2}\}) \sqcup (I \setminus \{\frac{1}{2}\})$, $Y = I \setminus \{\frac{1}{2}\}$ und $f: A \rightarrow Y, (x, t) \mapsto x$. Beachte, dass die Topologien dieser Räume wie in (a) nach Bemerkung 5.16 mit den in Beispiel 5.9 konstruierten übereinstimmen, da die Verklebeabbildungen in diesen Fällen (als lokale Homöomorphismen) offen und natürlich auch surjektiv sind.



Aufgabe 5.18. Welcher bekannte Raum entsteht aus einem Möbiusband, wenn man ...

- (a) es mit einer Kreisscheibe D^2 entlang des gemeinsamen Randes (jeweils homöomorph zu S^1) verklebt;
- (b) es mit einem zweiten Möbiusband entlang des gemeinsamen Randes S^1 verklebt;
- (c) es entlang der Mittellinie aufschneidet;
- (d) seinen Rand S^1 zu einem Punkt zusammenschlägt?

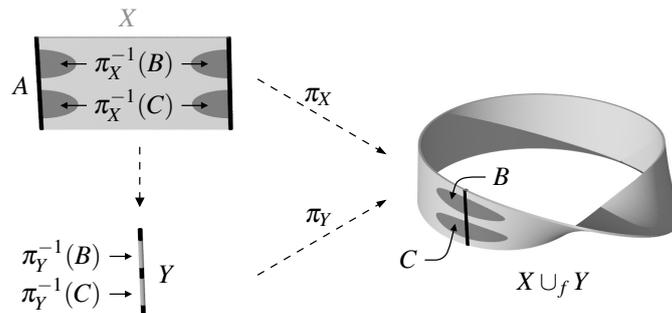
Ein Vorteil des Verklebens entlang von Abbildungen ist, dass wir in dieser Sprechweise auf relativ einfache Art ein Kriterium dafür beweisen können, wann so konstruierte Räume die von uns in Kapitel 4 betrachteten Trennungseigenschaften besitzen.

Satz 5.19. Es seien X und Y topologische Räume, $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge, und $f: A \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung.

- (a) Sind X und Y normal, so auch $X \cup_f Y$.
- (b) Sind X und Y zusätzlich Hausdorff-Räume, so auch $X \cup_f Y$.

Beweis.

- (a) Wir verwenden das Kriterium von Urysohn aus Satz 4.24. Es seien also $B, C \subset X \cup_f Y$ wie im Bild unten zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen. Dann sind $\pi_Y^{-1}(B)$ und $\pi_Y^{-1}(C)$ zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen von Y , und damit gibt es nach dem Lemma von Urysohn eine stetige Funktion $h: Y \rightarrow I$ mit $h|_{\pi_Y^{-1}(B)} = 0$ und $h|_{\pi_Y^{-1}(C)} = 1$.



Als Nächstes betrachten wir auf der (im Bild oben links dunkel dargestellten) abgeschlossenen Teilmenge $A \cup \pi_X^{-1}(B) \cup \pi_X^{-1}(C)$ von X die Funktion

$$A \cup \pi_X^{-1}(B) \cup \pi_X^{-1}(C) \rightarrow I, \quad x \mapsto \begin{cases} h(f(x)) & \text{falls } x \in A, \\ 0 & \text{falls } x \in \pi_X^{-1}(B), \\ 1 & \text{falls } x \in \pi_X^{-1}(C). \end{cases}$$

Sie ist nach Konstruktion von h wohldefiniert, d. h. für Punkte in $A \cap \pi_X^{-1}(B)$ bzw. $A \cap \pi_X^{-1}(C)$ ergeben beide anwendbaren Definitionszeilen den gleichen Wert. Da sie weiterhin nach Aufgabe 2.8 (b) stetig ist, können wir sie nach dem Satz 4.26 von Tietze zu einer stetigen Funktion $g: X \rightarrow I$ fortsetzen.

Dann ist aber die Funktion

$$X \cup_f Y \rightarrow I, \quad \bar{x} \mapsto \begin{cases} g(x) & \text{für } x \in X, \\ h(x) & \text{für } x \in Y \end{cases}$$

wohldefiniert und nach Konstruktion 5.12 (c) stetig, und außerdem auf B und C konstant 0 bzw. 1. Nach Satz 4.24 ist $X \cup_f Y$ also normal.

- (b) Da wir in $X \cup_f Y$ nach (a) bereits abgeschlossene Mengen durch offene Mengen trennen können, genügt es zu zeigen, dass Punkte abgeschlossen sind. Nach Definition der Quotiententopologie müssen wir also zeigen, dass Urbilder von Punkten in $X \cup_f Y$ unter π abgeschlossen in $X \sqcup Y$ sind.

Für Punkte der Form \bar{x} mit $x \in X \setminus A$ ist dies offensichtlich, da deren Urbilder $\{x\} \sqcup \emptyset$ selbst nur aus einem Punkt von X bestehen und somit wegen der vorausgesetzten Hausdorff-Eigenschaft von X nach Lemma 4.5 (b) abgeschlossen sind. Die anderen Urbilder sind nach Definition 5.13 (a) von der Form $f^{-1}(\{y\}) \sqcup \{y\}$ für ein $y \in Y$. Auch diese Mengen sind nach Konstruktion 5.12 (a) abgeschlossen in $X \sqcup Y$: Der Punkt $\{y\}$ ist wegen der Hausdorff-Eigenschaft von Y nach Lemma 4.5 (b) abgeschlossen, also ist $f^{-1}(\{y\})$ abgeschlossen in A und damit auch in X nach Satz 2.4 (e) und Aufgabe 1.10 (c). □

Beispiel 5.20. Nach Satz 5.19 ist mit I^2 auch das Möbiusband ein normaler Hausdorff-Raum, denn in der Darstellung von Beispiel 5.17 (b) ist die Verklebemenge $A = \{0, 1\} \times I$ abgeschlossen. Genau so sieht man, dass auch der Torus, die Kleinsche Flasche und die reelle projektive Ebene aus Beispiel 5.9 (c) normale Hausdorff-Räume sind. Beim Intervall mit doppeltem Mittelpunkt aus Beispiel 5.9 (d) haben wir dagegen schon gesehen, dass dieser Raum weder normal noch ein Hausdorff-Raum ist – und in der Tat ist hier in der Darstellung von Beispiel 5.17 (b) die Verklebemenge $A = I \setminus \{\frac{1}{2}\}$ auch nicht abgeschlossen in I .

07

Die letzte Art zur Erzeugung von Quotientenräumen, die wir hier behandeln wollen, benutzt das Herausteilen von Gruppenoperationen. Im Gegensatz zu den bisher untersuchten Fällen werden dabei nicht nur *manche* Punkte des Ausgangsraumes X mit anderen verklebt, sondern es liegt in der Regel *jeder* Punkt von X in einer nicht-trivialen Äquivalenzklasse.

Definition 5.21 (Gruppenoperationen und Bahnräume). Es seien X eine Menge und G eine Gruppe mit neutralem Element e .

- (a) Eine **(Gruppen-)Operation** von G auf X ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \cdot : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto g \cdot x, \end{aligned}$$

so dass $e \cdot x = x$ und $(g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ für alle $x \in X$ und $g, h \in G$ (beachte, dass im Ausdruck $(g \cdot h) \cdot x$ der erste Punkt für die Verknüpfung innerhalb der Gruppe G , der zweite für die Gruppenoperation steht). Genau wie bei Gruppenverknüpfungen kann man natürlich auch ein anderes Zeichen als „ \cdot “ für die Verknüpfung wählen; auch die Schreibweisen gx und $g(x)$ für $g \cdot x$ sind in der Literatur üblich.

(b) Operiert G auf X , so überprüft man leicht, dass

$$x \sim y \iff \text{es gibt ein } g \in G \text{ mit } y = g \cdot x$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert. Ihre Äquivalenzklassen $\bar{x} = \{g \cdot x : g \in G\}$ heißen **Bahnen** der Gruppenoperation. Die Menge X/\sim dieser Äquivalenzklassen wird daher auch **Bahnenraum** genannt. Man schreibt ihn in der Regel als X/G , auch wenn die Konstruktion dieses Raumes natürlich nicht nur von X und G , sondern auch von der Wahl der Gruppenoperation abhängt.

Bemerkung 5.22 (Stetigkeit der Gruppenoperation). Operiert eine Gruppe G auf einer Menge X , so definiert jedes Gruppenelement $g \in G$ offensichtlich eine Abbildung

$$\varphi_g : X \rightarrow X, x \mapsto g \cdot x$$

von X in sich, was auch den Namen „Gruppenoperation auf X “ erklärt. Die Eigenschaften einer Gruppenoperation aus Definition 5.21 besagen dann gerade $\varphi_e = \text{id}_X$ und $\varphi_{g \cdot h} = \varphi_g \circ \varphi_h$ für alle $g, h \in G$. Insbesondere sind also alle diese Abbildungen φ_g bijektiv mit Umkehrabbildung $\varphi_{g^{-1}}$, denn es gilt ja

$$\varphi_g \circ \varphi_{g^{-1}} = \varphi_{g^{-1}} \circ \varphi_g = \varphi_e = \text{id}_X.$$

Ist X nun sogar ein topologischer Raum, so können wir X/G natürlich wie gewohnt mit der Quotiententopologie ebenfalls als topologischen Raum auffassen. Diese Konstruktion bringt uns aber nur wenig, wenn die topologische Struktur nicht mit der Gruppenoperation verträglich ist. *Wir wollen daher im Folgenden als zusätzliche Bedingung an eine Gruppenoperation auf einem topologischen Raum immer voraussetzen, dass die Abbildungen φ_g stetig (und damit Homöomorphismen) sind.*

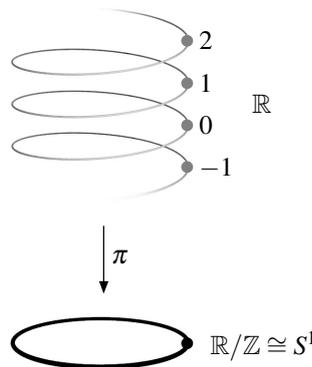
Beispiel 5.23. Die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ operiert durch Addition auf $X = \mathbb{R}$. Nach Definition 5.21 sind die Bahnen dieser Operation die Mengen

$$\bar{x} = \{x + n : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Im Bild rechts, in dem die reelle Zahlengerade als Spirale dargestellt ist, besteht eine Bahn also aus direkt übereinander liegenden Punkten, so dass man sich die Restklassenabbildung $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ als die vertikale Projektion vorstellen kann. Die Abbildung

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^1, \bar{x} \mapsto e^{2\pi i x}$$

ist wie in Beispiel 5.9 (a) wohldefiniert, stetig und bijektiv. Damit ist sie nach Folgerung 4.14 aber auch ein Homöomorphismus, da der Startraum \mathbb{R}/\mathbb{Z} (als Bild des kompakten Einheitsintervalls unter der Restklassenabbildung, siehe Folgerung 5.8 (c)) kompakt und der Zielraum S^1 ein Hausdorff-Raum ist. Also ist $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$.



Beachte, dass die Notation \mathbb{R}/\mathbb{Z} hierbei mehrdeutig ist: Es könnte damit auch das Zusammenschlagen von \mathbb{Z} in \mathbb{R} auf einen Punkt wie in Definition 5.13 (b) gemeint sein – was ein ganz anderer Raum ist!

Konstruktion 5.24 (Projektive Räume). Eine euch bereits bekannte Gruppenoperation aus den „Grundlagen der Mathematik“ ist die Skalarmultiplikation: Für $n \in \mathbb{N}$ operiert die multiplikative Gruppe $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ auf $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ durch

$$\lambda \cdot (x_0, \dots, x_n) = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n).$$

Der zugehörige Bahnenraum $X/G = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ heißt (**reeller**) **projektiver Raum** der Dimension n und wird mit \mathbb{P}^n bezeichnet.

Offensichtlich ist diese Konstruktion statt für die reellen Zahlen auch für einen beliebigen anderen Grundkörper K möglich. Man schreibt den zugehörigen projektiven Raum dann in der Regel als $\mathbb{P}_K^n = (K^{n+1} \setminus \{0\})/(K \setminus \{0\})$. Zu einem topologischen Raum wird dies aber natürlich erst, wenn man auf K (und damit auch auf $K^{n+1} \setminus \{0\}$) eine Topologie festgelegt hat. In der Topologie ist der Fall des reellen projektiven Raumes daher der wichtigste; auch $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ (mit der Standardtopologie auf \mathbb{C}) tritt manchmal auf.

Nach Konstruktion sind die Elemente von \mathbb{P}^n , d. h. die Bahnen der obigen Gruppenoperation, die Mengen

$$\overline{(x_0, \dots, x_n)} = \bar{x} = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\},$$

also die Ursprungsgeraden in \mathbb{R}^{n+1} (ohne den Nullpunkt). Dies liefert zwei mögliche geometrische Interpretationsmöglichkeiten für den projektiven Raum \mathbb{P}^n :

- (a) Jede Ursprungsgerade $\bar{x} \in \mathbb{P}^n$ trifft die Einheitskugel S^n wie im Bild unten links in zwei gegenüberliegenden Punkten. Ist also \sim die Relation auf S^n mit $x \sim -x$ für alle x , so ist die Abbildung

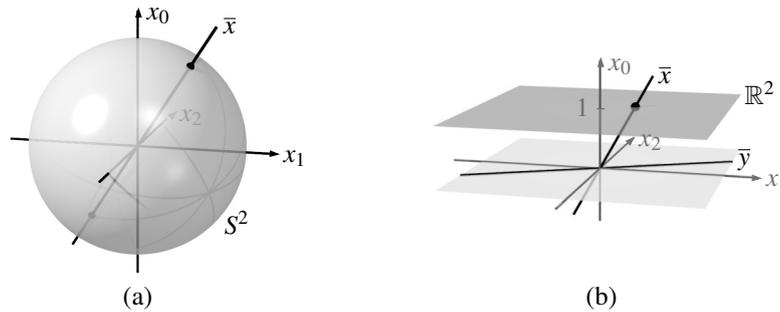
$$f: \mathbb{P}^n \rightarrow S^n / \sim, \bar{x} \mapsto \overline{\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right)},$$

die jede Ursprungsgerade auf die beiden Schnittpunkte mit S^n abbildet, stetig (da die Abbildung $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ auf $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ stetig ist, siehe Bemerkung 5.6) und bijektiv mit ebenfalls stetiger Umkehrabbildung

$$f^{-1}: S^n / \sim \rightarrow \mathbb{P}^n, \bar{x} \mapsto \bar{x}.$$

Also ist $\mathbb{P}^n \cong S^n / \sim$. Nach Definition 5.21 können wir dies auch als Bahnraum S^n / \mathbb{Z}_2 schreiben, wobei $\mathbb{Z}_2 \cong (\{1, -1\}, \cdot)$ multiplikativ auf S^n operiert.

Insbesondere ist \mathbb{P}^n nach Folgerung 5.8 damit (weg-)zusammenhängend und kompakt, da S^n diese Eigenschaften besitzt.



- (b) Jede Ursprungsgerade $\bar{x} = \overline{(x_0, \dots, x_n)}$ mit $x_0 \neq 0$ schneidet den verschobenen Unterraum $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 = 1\} \cong \mathbb{R}^n$ wie im Bild oben rechts in genau einem Punkt. Dies führt zu einer stetigen und injektiven Abbildung

$$g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{P}^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \overline{(1, x_1, \dots, x_n)},$$

die diesen Schnittpunkt auf die entsprechende Ursprungsgerade abbildet. Durch diese Abbildung g können wir \mathbb{R}^n also als Teilmenge von \mathbb{P}^n auffassen. Die nicht im Bild von g liegenden Punkte sind genau die Ursprungsgeraden der Form $\overline{(0, x_1, \dots, x_n)}$, die wie \bar{y} im obigen Bild in dem durch die Gleichung $x_0 = 0$ gegebenen Unterraum liegen. Diese zusätzlichen Punkte von \mathbb{P}^n kann man sich als „Punkte im Unendlichen“ in der entsprechenden Richtung vorstellen: Betrachten wir z. B. eine Gerade

$$\{(x_1, \dots, x_n) + \lambda (v_1, \dots, v_n) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

in \mathbb{R}^n , so sind die zugehörigen Punkte in \mathbb{P}^n für große λ unter der Einbettung g

$$\overline{(1, x_1 + \lambda v_1, \dots, x_n + \lambda v_n)} = \overline{\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{x_1}{\lambda} + v_1, \dots, \frac{x_n}{\lambda} + v_n\right)},$$

was für $\lambda \rightarrow \infty$ gerade gegen den Punkt $\overline{(0, v_1, \dots, v_n)} \in \mathbb{P}^n$ konvergiert, also gegen den „Punkt im Unendlichen“ für den entsprechenden Richtungsvektor. Mit anderen Worten können wir uns den projektiven Raum \mathbb{P}^n also so vorstellen, dass wir zu \mathbb{R}^n für jede Richtung einen Punkt im Unendlichen hinzufügen.

Aufgabe 5.25. Wir haben in diesem Kapitel zwei Räume kennengelernt, die wir „reelle projektive Ebene“ genannt haben:

- (a) D^2/\sim mit der Relation $z \sim -z$ für alle $z \in S^1$ wie in Beispiel 5.9 (c);
- (b) $\mathbb{P}^2 = (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ wie in Konstruktion 5.24.

Zeige, dass diese beiden Konstruktionen homöomorphe Räume ergeben.

Aufgabe 5.26. Eine endliche Gruppe G operiere auf einem normalen Hausdorff-Raum X . Beweise, dass dann auch der Quotientenraum X/G ein normaler Hausdorff-Raum ist.

Insbesondere zeigt dies mit Konstruktion 5.24 (a) also, dass $\mathbb{P}^n \cong S^n/\mathbb{Z}_2$ ein normaler Hausdorff-Raum ist.

Aufgabe 5.27 (Mannigfaltigkeiten). Es sei X ein kompakter Hausdorff-Raum, der lokal homöomorph zu \mathbb{R}^n für ein $n \in \mathbb{N}$ ist, d. h. zu jedem $x \in X$ gibt es einen Homöomorphismus $f_x: U_x \rightarrow V_x$ von einer offenen Umgebung U_x von x in eine offene Teilmenge $V_x \subset \mathbb{R}^n$. Man nennt einen solchen Raum auch eine n -dimensionale kompakte *Mannigfaltigkeit*; viele unserer in diesem Kapitel konstruierten Räume wie z. B. der Torus, die Kleinsche Flasche oder der reelle projektive Raum (siehe Beispiel 5.9 und Konstruktion 5.24) sind Beispiele dafür.

Man zeige:

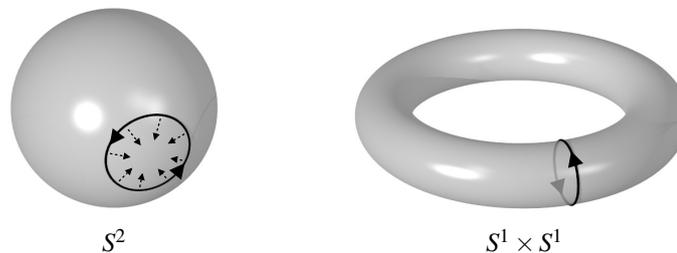
- (a) Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine abgeschlossene Umgebung $A_x \subset U_x$ sowie stetige Funktionen $\tilde{f}_x: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\tilde{g}_x: X \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}_x|_{A_x} = f_x|_{A_x}$ und $\tilde{g}_x^{-1}(\{0\}) = A_x$.
- (b) X lässt sich für ein geeignetes $N \in \mathbb{N}$ nach \mathbb{R}^N einbetten, d. h. X ist homöomorph zu einem Teilraum von \mathbb{R}^N .

Aufgabe 5.28. Man zeige:

- (a) Der reelle projektive Raum $\mathbb{P}^n = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ist eine n -dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit im Sinne von Aufgabe 5.27.
- (b) Der Raum $\mathbb{R}^{n+1}/(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ (bei dem $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ wiederum durch Skalarmultiplikation auf \mathbb{R}^{n+1} operiert) ist hingegen keine n -dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit.

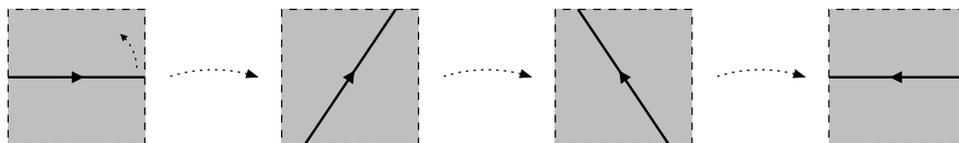
6. Homotopie

Wir haben im letzten Kapitel durch das Verkleben mit Hilfe der Quotiententopologie viele neue Möglichkeiten kennen gelernt, mit denen man weitere topologische Räume konstruieren kann. Bisher haben wir aber nur relativ wenige Kriterien behandelt, mit denen man diese Räume dann auch unterscheiden kann. So ist es z. B. sehr anschaulich, dass z. B. die Kugeloberfläche S^2 und der Torus $S^1 \times S^1$ wie im Bild unten nicht homöomorph sind, da der Torus im Gegensatz zu S^2 in der Mitte ein „Loch“ hat. Wie aber begründet man das formal? Keines unserer bisherigen Kriterien zur Unterscheidung topologischer Räume ist hier anwendbar, da sowohl S^2 als auch $S^1 \times S^1$ kompakte und normale Hausdorff-Räume sind, die sowohl zusammenhängend als auch wegzusammenhängend sind.



Wir benötigen hierzu ein neues topologisches Konzept, die sogenannte *Homotopie*. Die Idee hierbei ist prinzipiell, Deformationen von Objekten in einem topologischen Raum X zu studieren. Betrachten wir z. B. geschlossene Schleifen in X , so stellen wir zunächst anschaulich fest, dass solche Schleifen im Fall $X = S^2$ (wie im Bild oben links durch die gepunkteten Pfeile angedeutet) immer auf einen Punkt zusammenziehbar sind, während dies für $X = S^1 \times S^1$ bei der oben rechts eingezeichneten Schleife nicht möglich ist (einen exakten Beweis dieser Aussage werden wir später noch in Aufgabe 8.14 (c) und Beispiel 8.17 (b) sehen). Dies ist der Grund dafür, dass S^2 und $S^1 \times S^1$ topologisch verschieden sind.

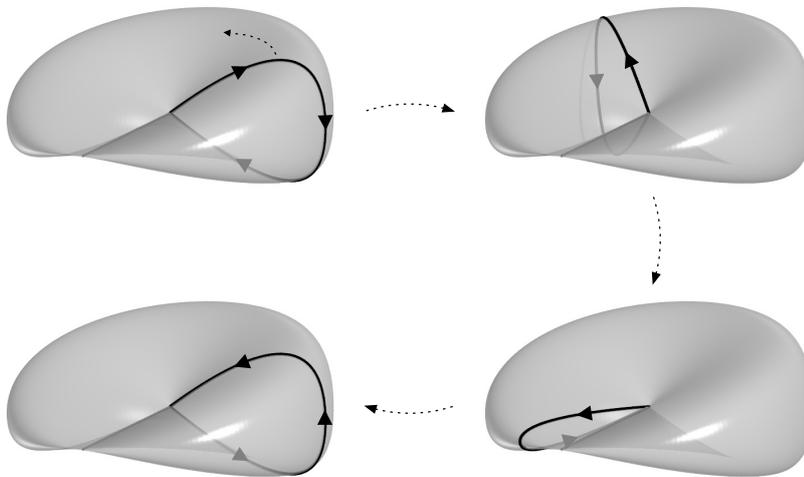
In der reellen projektiven Ebene \mathbb{P}^2 aus Beispiel 5.9 (c) bzw. Konstruktion 5.24 verhalten sich Schleifen sogar noch etwas anders. Dazu erinnern wir uns daran, dass dieser Raum als Quotient $X = I^2 / \sim$ konstruiert werden kann, wobei die Relation \sim gegenüberliegende Punkte auf dem Rand des Einheitsquadrats I^2 miteinander identifiziert. Der Weg im folgenden Bild links stellt also eine geschlossene Schleife in X dar, da sein Endpunkt rechts mit dem Anfangspunkt links identifiziert wird.



Wir können diesen Weg nun offensichtlich so in X deformieren, dass wir ihn (wie im Bild durch die gepunkteten Pfeile angedeutet) in I^2 drehen – wobei wir natürlich darauf achten müssen, dass Anfangs- und Endpunkt des Weges in I^2 immer gegenüberliegend bleiben, damit sie in X miteinander identifiziert werden, d. h. die Schleife bei der Deformation geschlossen bleibt. Nach einer halben Drehung erhalten wir dann die gleiche Schleife wie am Anfang, nur mit umgekehrter Orientierung. Auch hier ist es anschaulich klar, dass wir diese Schleife jedoch nicht auf einen Punkt zusammenziehen können, da wir sie nicht vom Rand des Einheitsquadrats wegbewegen können.

In \mathbb{P}^2 haben wir also eine Schleife gefunden, die nicht auf einen Punkt zusammenziehbar ist, die sich aber in die entgegengesetzt orientierte Schleife deformieren lässt. Dies ist weder bei der Kugeloberfläche S^2 der Fall (wo ja jede Schleife zusammenziehbar ist) noch beim Torus $S^1 \times S^1$ (wo sich eine nicht zusammenziehbare Schleife wie im Bild des Torus oben zwar um den Torus herum bewegen lässt, sie dadurch allerdings nicht ihre Orientierung ändert). Also ist die reelle projektive Ebene topologisch sowohl von S^2 als auch von $S^1 \times S^1$ verschieden.

Im dreidimensionalen Bild der reellen projektiven Ebene wie in Beispiel 5.9 (c) sieht die Bewegung dieser Schleife übrigens wie folgt aus – an der Stelle der Selbstdurchdringung wird der obere Teil der Schleife zum unteren und umgekehrt, so dass sich effektiv die Orientierung der Schleife ändert:



Wir sehen also, dass derartige Homotopieargumente sehr nützlich sind, um topologische Räume voneinander zu unterscheiden. Gleichzeitig stellt dieser Punkt auch den Anfang der sogenannten *algebraischen Topologie* dar (während wir uns bisher nur mit der *mengentheoretischen Topologie* beschäftigt haben). Wir werden nämlich in Definition 7.4 sehen, dass wir in einem topologischen Raum die Menge der Schleifen modulo Deformationen zu einer Gruppe – der sogenannten *Fundamentalgruppe* – machen und somit topologische Räume mit algebraischen Methoden untersuchen können. Die Tatsache, dass sich in S^2 jede Schleife zu einem Punkt zusammenziehen lässt, übersetzt sich dann einfach in die Aussage, dass die Fundamentalgruppe von S^2 die triviale Gruppe ist (während dies bei $S^1 \times S^1$ und \mathbb{P}^2 nicht der Fall ist), und die Existenz einer nicht zusammenziehbaren Schleife in \mathbb{P}^2 , die sich in die umgekehrt orientierte Schleife deformieren lässt, bedeutet gerade, dass die Fundamentalgruppe von \mathbb{P}^2 ein selbstinverses Element (außer dem neutralen) besitzt. In der Tat werden wir sehen, dass die Fundamentalgruppen des Torus und der reellen projektiven Ebene $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bzw. \mathbb{Z}_2 sind (siehe Beispiel 8.17).

Natürlich waren unsere bisherigen Begründungen aber alle nur anschaulicher Art und müssen nun noch formal exakt gemacht werden. Leider ist dies mit deutlich mehr Aufwand verbunden, als man vielleicht denken (und hoffen) würde. Wir werden daher in diesem Kapitel im Wesentlichen damit beschäftigt sein, das Konzept der Homotopie überhaupt erst einmal exakt einzuführen und ein paar erste Eigenschaften davon zu zeigen.

Definition 6.1 (Homotopie). Es seien $f, g: X \rightarrow Y$ zwei stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen und $A \subset X$ eine Teilmenge mit $f|_A = g|_A$.

Wir sagen, dass f **homotop** zu g relativ A ist (in Zeichen: $f \simeq g \text{ rel } A$), wenn es eine stetige Abbildung $H: X \times I \rightarrow Y$ gibt mit

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) && \text{für alle } x \in X; \\ H(x, 1) &= g(x) && \text{für alle } x \in X; \\ H(x, t) &= f(x) = g(x) && \text{für alle } x \in A \text{ und } t \in I. \end{aligned}$$

Man bezeichnet H dann auch als **Homotopie** zwischen f und g relativ A .

Ist $A = \emptyset$, so sagt man in diesem Fall einfach, dass f homotop zu g ist, und schreibt dies als $f \simeq g$.

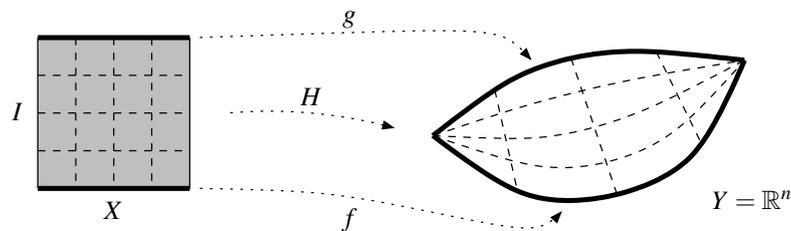
Bemerkung 6.2. Anschaulich bedeutet die Bedingung aus Definition 6.1 offensichtlich, dass sich f unter Festhaltung der Punkte in A stetig nach g deformieren lässt. In der Homotopie H kann man sich die zweite Variable t als Deformationsparameter vorstellen: Betrachtet man für festes $t \in I$ die Abbildung $H_t: X \rightarrow Y$, $x \mapsto H(x, t)$, so erhält man für $t = 0$ und $t = 1$ gerade $H_0 = f$ bzw. $H_1 = g$, während die anderen H_t zwischen diesen beiden Abbildungen stetig interpolieren. Dies wird besonders in den folgenden Beispielen deutlich.

Beispiel 6.3.

- (a) Es seien $X = P$ ein Punkt (also der topologische Raum, der aus nur einem Punkt besteht) und $A = \emptyset$. Die beiden Abbildungen $f, g: P \rightarrow Y$ sind dann also gerade durch ihre Bildpunkte $f(P)$ und $g(P)$ in Y gegeben. Eine Homotopie $H: P \times I \rightarrow Y$ kann somit als Abbildung $H: I \rightarrow Y$ mit $H(0) = f(P)$ und $H(1) = g(P)$ aufgefasst werden und ist damit nichts weiter als ein Weg von $f(P)$ nach $g(P)$ in Y im Sinne von Definition 3.1 (a) (parametrisiert durch das Einheitsintervall I). Damit ist Y genau dann wegzusammenhängend, wenn je zwei Abbildungen $f, g: P \rightarrow Y$ homotop zueinander sind. In diesem Sinne ist das Konzept des Wegzusammenhangs also ein einfacher Spezialfall von Homotopie.
- (b) Es sei $Y = \mathbb{R}^n$. Weiterhin seien X ein beliebiger topologischer Raum und $f, g: X \rightarrow Y$ zwei stetige Abbildungen, die auf einer Teilmenge $A \subset X$ übereinstimmen. Dann sind f und g stets homotop relativ A mit der Homotopie

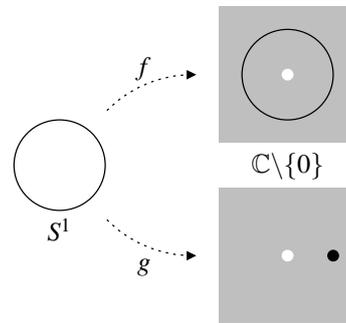
$$H: X \times I \rightarrow Y, (x, t) \mapsto (1-t)f(x) + tg(x),$$

die jeden Punkt $f(x)$ für t von 0 bis 1 auf einer geraden Linie mit $g(x)$ verbindet. Das Bild unten zeigt dies für den Fall $X = I$ und $A = \{0, 1\}$, so dass f und g also zwei Wege in Y mit gleichem Anfangs- und Endpunkt sind. Die Homotopie H ist gleich f bzw. g auf der unteren bzw. oberen Kante von $X \times I$ (d. h. für $t = 0$ bzw. $t = 1$), während die übrigen horizontalen Intervalle in $X \times I$ (für konstantes $t \in I$) auf die deformierten Zwischenwege abgebildet werden. Auf der linken bzw. rechten Kante ist H konstant gleich $f(0) = g(0)$ bzw. $f(1) = g(1)$, da es sich um eine Homotopie relativ $\{0, 1\}$ handelt. Die übrigen senkrechten Intervalle in $X \times I$ (für konstantes $x \in X$) werden von H auf gerade Linien abgebildet, die $f(x)$ mit $g(x)$ verbinden.



Dieselbe Folgerung ergibt sich offensichtlich auch, wenn $Y \subset \mathbb{R}^n$ eine *konvexe Menge* ist – also eine Teilmenge, die mit je zwei Punkten auch ihre ganze Verbindungsstrecke dazwischen enthält.

- (c) Zwischen den Räumen $X = S^1 \subset \mathbb{C}$ und $Y = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ betrachten wir wie im Bild rechts die beiden Abbildungen $f: X \rightarrow Y, x \mapsto x$ und $g: X \rightarrow Y, x \mapsto 1$. Es ist anschaulich einleuchtend, dass man die Schleife f um den Nullpunkt nicht auf den Punkt g deformieren kann, ohne sie dabei über den Nullpunkt zu ziehen (der ja nicht in Y enthalten ist). Die Abbildungen f und g sollten also nicht homotop zueinander sein.



In der Tat ist dies auch nicht der Fall. Einen Beweis hierfür können wir jedoch erst in Kapitel 8 mit Hilfe von Überlagerungen geben (siehe Beispiel 8.17 (a)).

Wenn ihr allerdings schon die Vorlesung „Einführung in die Funktionentheorie“ gehört habt, kennt ihr bereits einen Beweis – wenn wir Wege und Homotopien mit *stetig differenzierbaren* statt mit *stetigen* Abbildungen definiert hätten. In der Funktionentheorie zeigt man nämlich, dass sich geschlossene Wegintegrale über holomorphe Funktionen nicht ändern, wenn man den Integrationsweg im Holomorphiegebiet der Funktion deformiert [G3, Folgerung 5.3]. Speziell für die auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ sind die Wegintegrale über die Kreislinie f und den konstanten Weg g aber verschieden, nämlich $2\pi i$ bzw. 0, so dass diese beiden Wege also nicht homotop zueinander sein können [G3, Beispiel 5.4 (a)].

Der Beweis auf diese Art benutzt allerdings einerseits stetig differenzierbare statt stetige Homotopien, und andererseits den Cauchyschen Integralsatz aus der Funktionentheorie (der seinerseits nicht ganz einfach zu beweisen ist). Beides wollen wir hier in der Topologie natürlich nicht voraussetzen.

Aufgabe 6.4. Es seien X ein topologischer Raum, $a \in S^1$ und $f: S^1 \rightarrow X$ eine stetige Abbildung. Beweise, dass dann die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

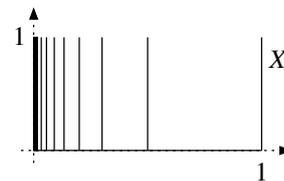
- f ist homotop relativ $\{a\}$ zu einer konstanten Abbildung.
- f ist homotop zu einer konstanten Abbildung.
- f lässt sich zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f}: D^2 \rightarrow X$ fortsetzen.

Aufgabe 6.5. In Aufgabe 6.4 haben wir für Abbildungen $S^1 \rightarrow X$ gezeigt, dass die Bedingung der Homotopie zu einer konstanten Abbildung unabhängig davon ist, ob wir sie relativ zu einem Punkt betrachten oder nicht. Wir wollen nun sehen, dass die analoge Aussage für Abbildungen mit beliebigem Startraum im Allgemeinen falsch ist.

Es sei dazu

$$X = (I \times \{0\}) \cup \left(\left(\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \right) \times I \right) \subset \mathbb{R}^2$$

der rechts dargestellte „Kamm“. Zeige, dass id_X dann homotop zu einer konstanten Abbildung ist, aber nicht homotop relativ $\{(0, 1)\}$.



Nach diesen Beispielen beginnen wir nun mit der Untersuchung des Homotopiebegriffs.

Lemma 6.6 (Eigenschaften der Homotopie). *Es seien X und Y topologische Räume sowie $A \subset X$. Dann gilt:*

- Die Homotopie relativ A ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Y (mit vorgegebener Einschränkung auf A).
- Homotopie ist in folgendem Sinne verträglich mit Verkettungen: Sind $f, g: X \rightarrow Y$ zwei stetige Abbildungen mit $f \simeq g \text{ rel } A$ und $f', g': Y \rightarrow Z$ zwei stetige Abbildungen in einen weiteren topologischen Raum Z mit $f' \simeq g' \text{ rel } f(A)$, so gilt auch $f' \circ f \simeq g' \circ g \text{ rel } A$.

Beweis.

(a) Wir müssen zeigen, dass die Relation $\simeq_{\text{rel } A}$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

- Reflexivität: Jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ ist zu sich selbst homotop relativ A mit der konstanten Homotopie $H(x, t) = f(x)$.
- Symmetrie: Ist f homotop zu g relativ A mit der Homotopie $H: X \times I \rightarrow Y$, so ist auch g homotop zu f relativ A mit der Homotopie $H'(x, t) = H(x, 1-t)$, die die Deformation H einfach in umgekehrter Richtung durchläuft.
- Transitivität: Sind f homotop zu g relativ A mit der Homotopie $H: X \times I \rightarrow Y$ sowie g homotop zu h relativ A mit der Homotopie $H': X \times I \rightarrow Y$, so ist auch f homotop zu h relativ A mit der zusammengesetzten Homotopie

$$H'' : X \times I \rightarrow Y, (x, t) \mapsto \begin{cases} H(x, 2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ H'(x, 2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

die mit der doppelten Geschwindigkeit zuerst f nach g und dann g nach h deformiert (beachte, dass H'' nach Aufgabe 2.8 (b) auch wirklich stetig ist).

(b) Sind $H: X \times I \rightarrow Y$ eine Homotopie von f nach g relativ A und $H': Y \times I \rightarrow Z$ eine Homotopie von f' nach g' relativ $f(A)$, so ist

$$H'' : X \times I \rightarrow Z, (x, t) \mapsto H'(H(x, t), t)$$

eine Homotopie von $f' \circ f$ nach $g' \circ g$ relativ A : Offensichtlich ist dies eine stetige Abbildung zwischen den behaupteten Räumen, und es gilt

$$\begin{aligned} H''(x, 0) &= f'(f(x)) && \text{für alle } x \in X, \\ H''(x, 1) &= g'(g(x)) && \text{für alle } x \in X, \\ H''(x, t) &= f'(f(x)) = g'(g(x)) && \text{für alle } x \in A \text{ und } t \in I. \end{aligned}$$

□

Die Verträglichkeit der Homotopierelation mit Verkettungen können wir benutzen, um von Abbildungen zu sprechen, die „bis auf Homotopie umkehrbar“ sind. Dies führt zum folgenden wichtigen Begriff der Homotopieäquivalenz.

Definition 6.7 (Homotopieäquivalenz). Es seien X und Y topologische Räume.

- Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ heißt **Homotopieäquivalenz**, wenn es eine stetige Abbildung $g: Y \rightarrow X$ gibt mit $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_Y$. In diesem Fall heißt g **homotopieinvers** zu f .
- X und Y heißen **homotopieäquivalent** (manchmal auch geschrieben als $X \simeq Y$), wenn es eine Homotopieäquivalenz zwischen ihnen gibt.
- X heißt **kontrahierbar** oder **zusammenziehbar**, wenn X homotopieäquivalent zum einpunktigen Raum ist.

08

Bemerkung 6.8.

- Auch die Homotopieäquivalenz topologischer Räume erfüllt die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation: Sie ist nach Definition symmetrisch, und außerdem reflexiv, da id_X eine Homotopieäquivalenz von X nach X ist. Für die Transitivität seien $f: X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinversem $g: Y \rightarrow X$ sowie $f': Y \rightarrow Z$ eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinversem $g': Z \rightarrow Y$. Dann ist auch $f' \circ f: X \rightarrow Z$ eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinversem $g \circ g': Z \rightarrow X$, denn es gilt

$$(g \circ g') \circ (f' \circ f) = g \circ (g' \circ f') \circ f \stackrel{(*)}{\simeq} g \circ \text{id}_Y \circ f = g \circ f \simeq \text{id}_X$$

und analog $(f' \circ f) \circ (g \circ g') \simeq \text{id}_Z$, wobei wir in (*) Lemma 6.6 (b) verwendet haben.

- (b) Offensichtlich ist jeder Homöomorphismus eine Homotopieäquivalenz. Auch anschaulich kann man sich sowohl die Homöomorphie als auch die Homotopieäquivalenz zweier Räume so vorstellen, dass sich der eine in den anderen deformieren lässt, ohne dabei „etwas auseinanderzureißen oder zusammenzukleben“. Die wesentliche Abschwächung bei der Homotopieäquivalenz besteht darin, dass die dafür benötigten zueinander „inversen“ Abbildungen nun nicht mehr bijektiv sein müssen, also z. B. auch „Klumpen ohne Löcher“ zu einem einzigen Punkt zusammengedrückt werden können. Genau wie bei der Homöomorphie sollte es daher mit ein bisschen Übung für zwei gegebene Räume, von denen man eine anschauliche Vorstellung hat, möglich sein, durch „einfaches Hinschauen“ zu entscheiden, ob sie zueinander homotopieäquivalent sind oder nicht. Die folgenden Beispiele und Konzepte sollten helfen, eine derartige Intuition aufzubauen.

Bemerkung 6.9 (Kontrahierbare Räume). Es sei P der einpunktige topologische Raum.

- (a) Nach Definition ist ein topologischer Raum X genau dann kontrahierbar, wenn es stetige Abbildungen $f: X \rightarrow P$ und $g: P \rightarrow X$ gibt mit $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_P$. Hierbei ist die letzte Bedingung natürlich trivial, da eine beliebige Abbildung von P nach P immer die Identität ist. Außerdem ist f notwendigerweise eine konstante Abbildung, so dass auch $g \circ f$ eine konstante Abbildung (mit Bildpunkt $g(P)$) ist. Wir sehen also, dass X genau dann kontrahierbar ist, wenn die Identität id_X auf X homotop zu einer konstanten Abbildung ist. An dieser äquivalenten Formulierung erkennt man anschaulich besonders gut, was Kontrahierbarkeit bedeutet: dass sich der Raum durch stetige Deformation auf einen Punkt zusammenziehen lässt.
- (b) Ist X kontrahierbar, so sind zwei stetige Abbildungen $f, g: Y \rightarrow X$ von einem weiteren topologischen Raum nach X immer homotop zueinander: Nach (a) ist dann nämlich id_X homotop zu einer konstanten Abbildung $c: X \rightarrow X$. Damit folgt

$$f = \text{id}_X \circ f \stackrel{6.6(b)}{\simeq} c \circ f = c \circ g \stackrel{6.6(b)}{\simeq} \text{id}_X \circ g = g.$$

Wenden wir dies auf den Fall $Y = P$ an, so sehen wir also gemäß Beispiel 6.3 (a), dass jeder kontrahierbare Raum wegzusammenhängend ist – was ja auch anschaulich klar sein sollte, da sich mehrere Komponenten ohne Zusammenkleben nicht zu einem Punkt verbinden lassen.

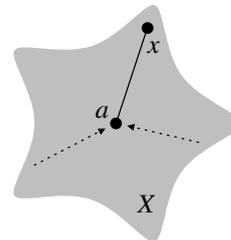
- (c) Sind X und Y beide kontrahierbar, so ist nach (b) insbesondere jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, denn für ein beliebiges $g: Y \rightarrow X$ gilt dann ja $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_Y$.

Beispiel 6.10.

- (a) Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ wie im Bild rechts heißt **sternförmig**, wenn es einen Punkt $a \in X$ gibt, so dass für alle $x \in X$ die komplette Verbindungsstrecke von a nach x in X liegt. In diesem Fall ist

$$H: X \times I \rightarrow X, (x, t) \mapsto (1-t)x + ta$$

eine Homotopie von der Identität id_X zur konstanten Abbildung a (die jeden Punkt auf einer geraden Linie nach a bewegt). Damit sind sternförmige Mengen nach Bemerkung 6.9 (a) also stets kontrahierbar.



- (b) Setzen wir noch einmal unser anschauliches und noch nicht bewiesenes Ergebnis aus Beispiel 6.3 (c) voraus, dass die Abbildungen $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $x \mapsto x$ und $g: S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $x \mapsto 1$ nicht homotop sind, so bedeutet dies nach Bemerkung 6.9 (b) gerade, dass $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nicht kontrahierbar sein kann.

Ein oft auftretender Fall von Homotopieäquivalenzen ist der, in dem einer der Räume ein Teilraum des anderen und die Homotopieäquivalenz gerade die Einbettungsabbildung ist. Diese Situation ist meistens anschaulich gut zu erkennen und hat einen besonderen Namen.

Definition 6.11 (Deformationsretrakte). Es sei A eine Teilmenge eines topologischen Raumes X . Wir bezeichnen die Einbettungsabbildung mit $i: A \rightarrow X, x \mapsto x$.

Eine stetige Abbildung $f: X \rightarrow A$ mit $f|_A = \text{id}_A$ (also $f \circ i = \text{id}_A$) und $i \circ f \simeq \text{id}_X$ heißt **Deformationsretraktion**. Im Fall der Existenz einer solchen Abbildung heißt A ein **Deformationsretrakt** von X .

Offensichtlich ist jede Deformationsretraktion eine Homotopieäquivalenz. Ein Deformationsretrakt ist also stets homotopieäquivalent zu dem Raum, in dem er liegt.

Beispiel 6.12.

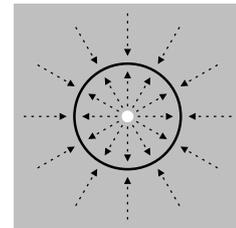
- (a) In einer sternförmigen Menge X wie in Beispiel 6.10 (a) ist der „Mittelpunkt“ $A = \{a\}$ ein Deformationsretrakt von X : Die konstante Abbildung $f: X \rightarrow A$ erfüllt natürlich $f|_A = \text{id}_A$, und wie im obigen Beispiel gesehen ist die Abbildung $i \circ f: X \rightarrow X, x \mapsto a$ homotop zur Identität id_X .
- (b) Die Kreislinie $A = S^1$ ist ein Deformationsretrakt von $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$: Die unten rechts im Bild dargestellte stetige Abbildung

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow S^1, z \mapsto \frac{z}{|z|},$$

die jeden Punkt radial auf den Einheitskreis projiziert, ist eine Deformationsretraktion, denn es ist natürlich $f|_{S^1} = \text{id}_{S^1}$, und die Abbildung

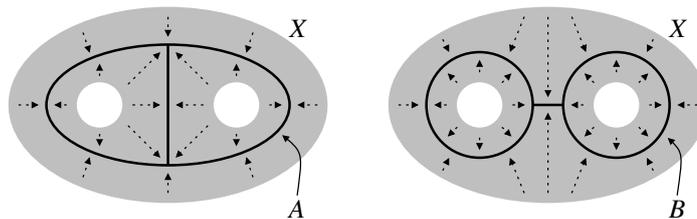
$$H: X \times I \rightarrow X, (z, t) \mapsto (1-t)z + t \frac{z}{|z|},$$

die jeden Punkt $z \neq 0$ auf einer geraden Linie auf seinen Bildpunkt $f(z)$ schiebt, ist eine Homotopie zwischen id_X und der Abbildung $i \circ f: X \rightarrow X, z \mapsto f(z)$. Das Bild kann man also auch so interpretieren, dass die gestrichelten Pfeile die Homotopie darstellen.



Auf die gleiche Art sieht man, dass die Sphäre S^{n-1} für alle $n > 1$ ein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist.

- (c) Es seien A und B die aus den durchgezogenen Linien im Bild unten bestehenden „eindimensionalen“ Teilräume von \mathbb{R}^2 , die jeweils zwei Schleifen besitzen. Natürlich sind A und B nicht homöomorph, da B durch Herausnahme des Mittelpunktes in zwei Wegzusammenhangskomponenten zerfällt, während A beim Herausnehmen eines beliebigen Punktes wegzusammenhängend bleibt (siehe Beispiel 3.9).



Die Räume sind aber homotopieäquivalent, da sie beide – wie die gestrichelten Pfeile analog zu (b) zeigen – Deformationsretrakte desselben Raumes X und somit homotopieäquivalent zu X sind.

Aufgabe 6.13. Zeige, dass die folgenden drei topologischen Räume homotopieäquivalent sind:

- (a) die Kreislinie S^1 ;
- (b) das Möbiusband;
- (c) der Raum $X = \{A \in \text{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) : \det A > 0\}$.

(Hinweis zu (c): Untersuche die Abbildung $f: X \rightarrow S^1$, die einer Matrix ihre normierte erste Spalte zuordnet.)

Aufgabe 6.14. Zu einer stetigen Abbildung $f: X \rightarrow Y$ sei $M_f = (X \times I) \cup_g Y$ mit der Abbildung $g: X \times \{1\} \rightarrow Y$, $(x, 1) \mapsto f(x)$. Man nennt M_f den *Abbildungszylinder* von f .

- (a) Zeichne ein Bild von M_f für die Fälle der Inklusionsabbildung $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ und der Abbildung $f: S^1 \rightarrow S^1$, $z \mapsto z^2$.
- (b) Zeige, dass sich jede stetige Abbildung $f: X \rightarrow Y$ als Verkettung von zwei stetigen Abbildungen $X \xrightarrow{g} M_f \xrightarrow{h} Y$ schreiben lässt, wobei g eine Einbettung (also eine injektive Abbildung, die ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist) und h eine Homotopieäquivalenz ist.

7. Die Fundamentalgruppe

Im letzten Kapitel haben wir Homotopien von Abbildungen zwischen zwei topologischen Räumen untersucht. Dabei hatten wir bereits erwähnt, dass der für uns wichtigste Fall dieses Konzepts die Homotopie von Schleifen in einem gegebenen Raum X sein wird – genauer gesagt die Homotopie von geschlossenen Wegen mit vorgegebenem Anfangs- und Endpunkt $x_0 \in X$, relativ dieser beiden Randpunkte. Wie wir gleich sehen werden, ist der Vorteil dieser speziellen Situation nämlich, dass die Homotopieklassen solcher Wege eine Gruppe bilden. Die Verknüpfung in dieser sogenannten Fundamentalgruppe von X ist dabei einfach das Zusammensetzen der Wege, das neutrale Element wird der konstante Weg x_0 , und das inverse Element zu einem Weg derselbe Weg mit umgekehrter Orientierung. Auf diese Art kann man dann also topologische Räume mit Hilfe von Gruppen, d. h. mit algebraischen Methoden studieren.

Um die Homotopien zwischen derartigen Wegen einfacher definieren zu können, ist es dabei üblich, die Wege nicht wie in Kapitel 3 durch ein beliebiges kompaktes Intervall, sondern stets durch das Einheitsintervall I zu parametrisieren. Wir vereinbaren daher:

Ein Weg in einem topologischen Raum X sei im Folgenden immer eine stetige Abbildung $\alpha: I \rightarrow X$.

In unseren Skizzen werden wir solche Wege dabei in der Regel nicht als Abbildung darstellen, sondern nur ihr Bild in X zeichnen, zusammen mit einem Pfeil, der die Orientierung des Weges angibt. Diese Vereinfachung ist dadurch gerechtfertigt, dass wir in Lemma 7.2 (c) unten sehen werden, dass eine orientierungserhaltende Umparametrisierung eines Weges seine Homotopieklasse nicht ändert.

Zur Konstruktion der Fundamentalgruppe müssen wir als Erstes die benötigten Operationen einführen, also das Zusammensetzen und Umkehren von Wegen. Das Zusammensetzen von zwei Wegen ist dabei natürlich nur dann möglich, wenn der zweite Weg genau dort startet, wo der erste aufhört.

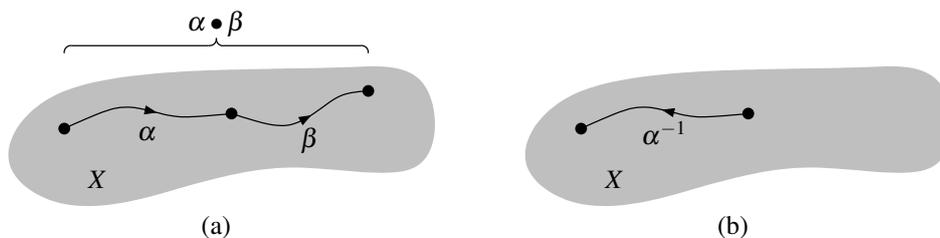
Definition 7.1 (Zusammengesetzte und inverse Wege). In einem topologischen Raum X seien α und β zwei Wege mit $\alpha(1) = \beta(0)$.

- (a) Der **zusammengesetzte Weg** $\alpha \bullet \beta$ ist definiert als

$$\alpha \bullet \beta: I \rightarrow X, x \mapsto \begin{cases} \alpha(2x) & \text{für } x \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2x-1) & \text{für } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

- (b) Der zu α **inverse Weg** α^{-1} ist

$$\alpha^{-1}: I \rightarrow X, x \mapsto \alpha(1-x).$$



Als Erstes wollen wir zeigen, dass diese Operationen mit Homotopien verträglich sind, und dass orientierungserhaltende Umparametrisierungen eines Weges seine Homotopieklasse nicht ändern.

Lemma 7.2. *Es seien α und β zwei Wege in einem topologischen Raum X mit $\alpha(1) = \beta(0)$. Ferner seien α', β' zwei weitere Wege mit $\alpha' \simeq \alpha \text{ rel } \{0, 1\}$ und $\beta' \simeq \beta \text{ rel } \{0, 1\}$. Dann gilt:*

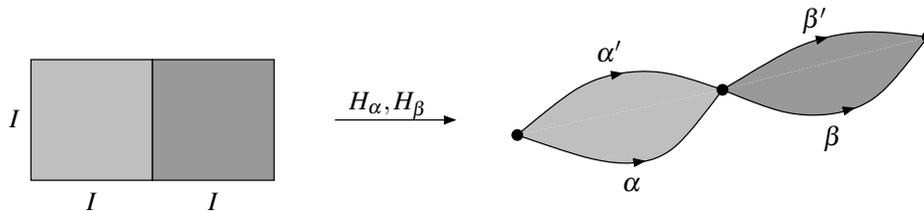
- (a) $\alpha \bullet \beta \simeq \alpha' \bullet \beta' \text{ rel } \{0, 1\}$.
- (b) $\alpha^{-1} \simeq (\alpha')^{-1} \text{ rel } \{0, 1\}$.
- (c) *Ist $\varphi: I \rightarrow I$ eine stetige Abbildung mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = 1$, so ist $\alpha \simeq \alpha \circ \varphi \text{ rel } \{0, 1\}$. (Insbesondere wenn φ sogar ein Homöomorphismus ist, kann man sich den Weg $\alpha \circ \varphi$ als orientierungserhaltende Umparametrisierung des Weges α vorstellen.)*

Beweis. Es seien $H_\alpha, H_\beta: I \times I \rightarrow X$ Homotopien von α nach α' bzw. β nach β' relativ $\{0, 1\}$.

(a) Wie im Bild unten ist

$$I \times I \rightarrow X, (x, t) \mapsto \begin{cases} H_\alpha(2x, t) & \text{für } x \leq \frac{1}{2}, \\ H_\beta(2x - 1, t) & \text{für } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

eine Homotopie von $\alpha \bullet \beta$ nach $\alpha' \bullet \beta'$ relativ $\{0, 1\}$ (in der Tat sogar relativ $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, aber dies werden wir im Folgenden nicht benötigen).



- (b) Die Abbildung $I \times I \rightarrow X, (x, t) \mapsto H_\alpha(1 - x, t)$ ist eine Homotopie zwischen α^{-1} und $(\alpha')^{-1}$ relativ $\{0, 1\}$.
- (c) Da das Einheitsintervall I konvex ist, ist $\text{id}_I \simeq \varphi \text{ rel } \{0, 1\}$ nach Beispiel 6.3 (b). Also folgt nach Lemma 6.6 (b) auch $\alpha = \alpha \circ \text{id}_I \simeq \alpha \circ \varphi \text{ rel } \{0, 1\}$. \square

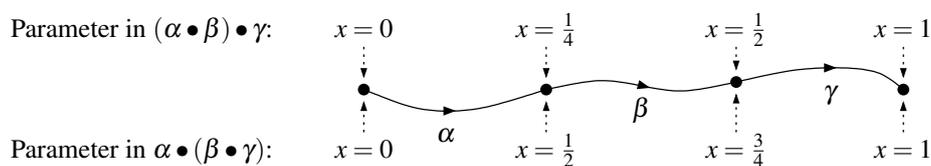
Als Nächstes wollen wir sehen, dass das Zusammensetzen von Wegen modulo Homotopie relativ der Randpunkte die Eigenschaften einer Gruppenverknüpfung erfüllt.

Lemma 7.3 (Gruppenaxiome für das Zusammensetzen von Wegen). *Es sei wieder X ein topologischer Raum.*

- (a) *Sind α, β, γ Wege in X mit $\alpha(1) = \beta(0)$ und $\beta(1) = \gamma(0)$, so gilt $(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma \simeq \alpha \bullet (\beta \bullet \gamma) \text{ rel } \{0, 1\}$.*
- (b) *Ist α ein Weg in X und ε der konstante Weg am Punkt $\alpha(0)$, so ist $\varepsilon \bullet \alpha \simeq \alpha \text{ rel } \{0, 1\}$.*
- (c) *Ist α ein Weg in X und ε der konstante Weg am Punkt $\alpha(1)$, so ist $\alpha^{-1} \bullet \varepsilon \simeq \varepsilon \text{ rel } \{0, 1\}$.*

Beweis.

- (a) Sowohl $(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma$ als auch $\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma)$ durchlaufen in X der Reihe nach die drei Wege α, β und γ . Allerdings tun sie dies nach unserer Definition von zusammengesetzten Wegen mit unterschiedlichen Parametrisierungen: Während der erste Weg z. B. beim Parameterwert $x = \frac{1}{2}$ am Punkt $(\alpha \bullet \beta)(1) = \gamma(0)$ ist, ist der zweite Weg dann am Punkt $\alpha(1) = (\beta \bullet \gamma)(0)$. Dies ist im folgenden Bild dargestellt.

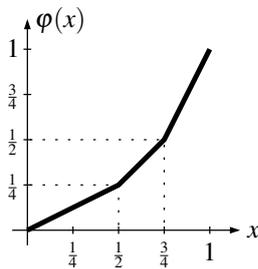


Der Weg $\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma)$ ist also eine Umparametrisierung von $(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma$ – genauer gesagt gilt

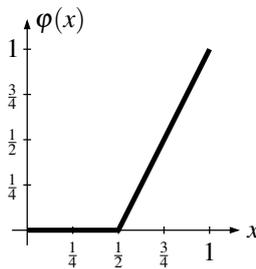
$$\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma) = ((\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma) \circ \varphi$$

mit der unten links dargestellten Funktion $\varphi: I \rightarrow I$. Die behauptete Homotopie ergibt sich damit aus Lemma 7.2 (c).

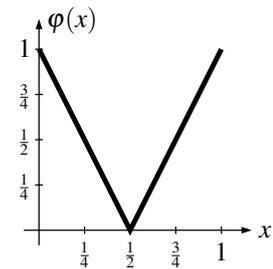
- (b) Offensichtlich ist $\varepsilon \bullet \alpha = \alpha \circ \varphi$ mit der unten in der Mitte eingezeichneten Funktion φ . Damit ergibt sich die Aussage wieder aus Lemma 7.2 (c).
- (c) Nach Definition des zusammengesetzten Weges ist $\alpha^{-1} \bullet \alpha = \alpha \circ \varphi$ mit der unten rechts eingezeichneten Funktion φ . Da I konvex ist, ist φ nach Beispiel 6.3 (b) in diesem Fall relativ $\{0, 1\}$ homotop zur konstanten Abbildung 1. Durch Verkettung mit α sehen wir also mit Lemma 6.6 (b), dass $\alpha^{-1} \bullet \alpha = \alpha \circ \varphi$ homotop relativ $\{0, 1\}$ zur konstanten Abbildung $\alpha(1)$ ist.



(a)



(b)



(c)

□

Wir können unsere Ergebnisse nun zur zentralen Definition der Fundamentalgruppe zusammensetzen. Damit alle betrachteten Wege verknüpfbar und die konstanten Wege in Lemma 7.3 (b) und (c) die gleichen sind, müssen wir dabei voraussetzen, dass die Wege geschlossen sind und einen vorher festgelegten Anfangs- und Endpunkt haben. Aufgrund der Homotopie relativ $\{0, 1\}$ bedeutet das dann natürlich, dass auch in den Homotopien die Wege geschlossen bleiben und den vorgegebenen Anfangs- und Endpunkt behalten müssen.

Definition 7.4 (Fundamentalgruppe). Es seien X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ein fest gewählter Basispunkt – man nennt das Paar (X, x_0) dann auch einen **punktierten topologischen Raum**. Wir bezeichnen mit

$$\Gamma(X, x_0) := \{ \alpha: I \rightarrow X \text{ stetig mit } \alpha(0) = \alpha(1) = x_0 \}$$

die Menge aller geschlossenen Wege in X mit Anfangs- und Endpunkt x_0 , und mit

$$\pi_1(X, x_0) := \Gamma(X, x_0) / \simeq_{\text{rel } \{0, 1\}}$$

die Menge aller Äquivalenzklassen solcher Wege modulo Homotopie relativ $\{0, 1\}$. Wir schreiben Äquivalenzklassen modulo Homotopie relativ $\{0, 1\}$ im Folgenden als $[\cdot]$, um Verwechslungen mit anderen Äquivalenzklassenbildungen (z. B. bei der Quotiententopologie) zu vermeiden.

Die Verknüpfung

$$[\alpha] \bullet [\beta] := [\alpha \bullet \beta]$$

ist nun nach Lemma 7.2 (a) wohldefiniert und macht $\pi_1(X, x_0)$ nach Lemma 7.3 zu einer Gruppe. Das neutrale Element in dieser Gruppe ist die Klasse des konstanten Weges bei x_0 , und das zu $[\alpha]$ inverse Element ist $[\alpha^{-1}]$.

Man nennt $\pi_1(X, x_0)$ mit dieser Verknüpfung die **Fundamentalgruppe** von X mit Basispunkt x_0 . Wie in allgemeinen Gruppen üblich schreibt man das neutrale Element dieser Gruppe oft einfach als 1. Ein Weg $\alpha \in \Gamma(X, x_0)$ mit $[\alpha] = 1 \in \pi_1(X, x_0)$ heißt **nullhomotop**.

09

Bemerkung 7.5.

- (a) Der Index 1 in der allgemein üblichen Bezeichnung $\pi_1(X, x_0)$ für die Fundamentalgruppe kommt daher, dass diese Gruppe *eindimensionale* Objekte, nämlich geschlossene Wege im Raum X beschreibt. In der allgemeinen Homotopietheorie, die wir in dieser Vorlesung nicht

weiter verfolgen werden, kann man eine analoge Konstruktion auch mit stetigen Abbildungen $\alpha: I^k \rightarrow X$ für $k \in \mathbb{N}_{>0}$ durchführen, die auf dem gesamten Rand des k -dimensionalen Einheitswürfels den Wert x_0 annehmen, und erhält so die sogenannten höheren Homotopiegruppen $\pi_k(X, x_0)$.

- (b) Nach Beispiel 5.9 (a) bzw. 5.17 (a) ist die Kreislinie S^1 homöomorph zum Quotientenraum $I/\{0, 1\}$, und nach Bemerkung 5.6 sind stetige Abbildungen $I \rightarrow X$, die die Punkte 0 und 1 auf x_0 abbilden, unter diesem Homöomorphismus damit das gleiche wie stetige Abbildungen $S^1 \rightarrow X$, die den Punkt 1 auf x_0 abbilden. Eine analoge Aussage gilt für die Starträume $S^1 \times I$ und $(I/\{0, 1\}) \times I$ von Homotopien solcher Schleifen. Man kann die Räume $\Gamma(X, x_0)$ und $\pi_1(X, x_0)$ aus Definition 7.4 damit äquivalent auch als

$$\Gamma(X, x_0) = \{f: S^1 \rightarrow X \text{ stetig mit } f(1) = x_0\}$$

$$\text{bzw. } \pi_1(X, x_0) = \{f: S^1 \rightarrow X \text{ stetig mit } f(1) = x_0\} / \simeq \text{rel } \{1\}$$

schreiben. Wir haben diese Art der Darstellung von geschlossenen Wegen nur deshalb nicht gewählt, weil das Zusammensetzen von Wegen in dieser Schreibweise komplizierter aussehen würde.

Beispiel 7.6. Wir hatten in Beispiel 6.3 (c) bereits gesehen (wenn auch noch nicht bewiesen), dass die Abbildungen $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $x \mapsto x$ und $g: S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $x \mapsto 1$ nicht homotop zueinander sind. Sie sind damit also erst recht nicht homotop relativ $\{1\}$, und bestimmen gemäß Bemerkung 7.5 (b) demnach verschiedene Elemente in $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1)$. Insbesondere ist die Gruppe $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1)$ also nicht die triviale Gruppe. (Wir werden im nächsten Kapitel in Beispiel 8.17 (a) sehen, dass $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1) \cong \mathbb{Z}$ gilt.)

Aufgabe 7.7 (Fundamentalgruppe von Produkten). Es seien (X, x_0) und (Y, y_0) zwei punktierte topologische Räume. Zeige, dass

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Um auf der Menge der Homotopieklassen von Wegen in einem Raum X durch Zusammensetzen eine Gruppenstruktur zu definieren, mussten wir einen Anfangs- und Endpunkt $x_0 \in X$ für diese Wege festhalten. Wir wollen nun untersuchen, in wie weit die resultierende Fundamentalgruppe von der Wahl dieses Basispunktes abhängt.

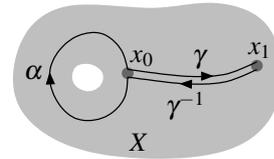
Satz 7.8 (Unabhängigkeit der Fundamentalgruppen vom Basispunkt). *Es sei γ ein Weg in einem topologischen Raum X mit Startpunkt x_0 und Endpunkt x_1 .*

Dann ist die Abbildung

$$f: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1), [\alpha] \mapsto [\gamma^{-1}] \bullet [\alpha] \bullet [\gamma]$$

wohldefiniert und ein Gruppenisomorphismus.

Insbesondere gilt also: Ist X wegzusammenhängend, so hängt die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ bis auf Isomorphie nicht von der Wahl des Basispunktes x_0 ab. Wir bezeichnen sie daher dann oft auch einfach mit $\pi_1(X)$.



Beweis. Die Abbildung f ist natürlich wohldefiniert nach Lemma 7.2 (a) und 7.3 (a). Sie ist ein Morphismus, denn nach den Rechenregeln aus Lemma 7.3 und der Definition der Verknüpfung von Homotopieklassen in Definition 7.4 gilt

$$f([\alpha]) \bullet f([\beta]) = [\gamma^{-1}] \bullet [\alpha] \bullet [\gamma] \bullet [\gamma^{-1}] \bullet [\beta] \bullet [\gamma] = [\gamma^{-1}] \bullet [\alpha] \bullet [\beta] \bullet [\gamma] = f([\alpha] \bullet [\beta])$$

für alle $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$. Außerdem ist sie bijektiv mit Umkehrabbildung

$$f^{-1}: \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0), [\alpha] \mapsto [\gamma] \bullet [\alpha] \bullet [\gamma^{-1}],$$

denn für alle $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ gilt mit den gleichen Rechenregeln

$$f^{-1}(f([\alpha])) = f^{-1}([\gamma^{-1}] \bullet [\alpha] \bullet [\gamma]) = [\gamma] \bullet [\gamma^{-1}] \bullet [\alpha] \bullet [\gamma] \bullet [\gamma^{-1}] = [\alpha],$$

und genauso auch $f(f^{-1}([\alpha])) = [\alpha]$ für alle $[\alpha] \in \pi_1(X, x_1)$. \square

Bemerkung 7.9. In nicht wegzusammenhängenden Räumen können wir eine Unabhängigkeit der Fundamentalgruppe vom Basispunkt wie in Satz 7.8 natürlich nicht erwarten: Da alle betrachteten Schleifen ja immer komplett in einer Wegzusammenhangskomponente bleiben müssen, beschreibt $\pi_1(X, x_0)$ nur die Komponente, in der x_0 liegt. Gibt es also mehrere solche Komponenten, sind die Fundamentalgruppen bezüglich Basispunkten in verschiedenen Komponenten völlig unabhängig voneinander.

Definition 7.10 (Einfach zusammenhängende Räume). Ein topologischer Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, wenn er wegzusammenhängend ist und für die (nach Satz 7.8) dann basispunktunabhängige Fundamentalgruppe $\pi_1(X) \cong \{1\}$ gilt.

Bemerkung 7.11. Ein wegzusammenhängender Raum X ist nach Bemerkung 7.5 (b) genau dann einfach zusammenhängend, wenn jede stetige Abbildung $f: S^1 \rightarrow X$ homotop relativ $\{1\}$ zu einer konstanten Abbildung ist. Nach Aufgabe 6.4 ist dies äquivalent dazu, dass jedes solche f (nicht-relativ) homotop zu einer konstanten Abbildung ist, also dass sich jede Schleife in X (ohne Festhalten eines Basispunktes) zu einem Punkt zusammenziehen lässt. Man sagt dazu manchmal auch, dass jede Schleife *frei homotop* zu einer konstanten Abbildung ist.

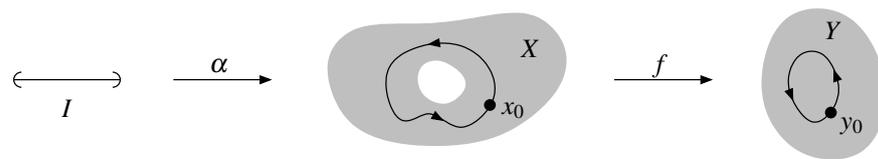
Bisher haben wir in diesem Kapitel jedem punktierten topologischen Raum (X, x_0) eine Gruppe $\pi_1(X, x_0)$ zugeordnet. Da wir diese Fundamentalgruppen auch miteinander vergleichen möchten, wollen wir nun sehen, dass stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen stets Gruppenhomomorphismen zwischen den zugehörigen Fundamentalgruppen induzieren. Die Idee hinter dieser Konstruktion ist sehr einfach, da man mit einer stetigen Abbildung $f: X \rightarrow Y$ durch Verkettung mit einem (geschlossenen) Weg $\alpha: I \rightarrow X$ in X natürlich auch einen geschlossenen Weg $f \circ \alpha: I \rightarrow Y$ in Y erzeugen kann.

Lemma und Konstruktion 7.12 (Morphismen zwischen Fundamentalgruppen). *Es seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte topologische Räume und $f: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung mit $f(x_0) = y_0$ – man sagt dann auch, dass $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ eine stetige Abbildung zwischen punktierten topologischen Räumen ist.*

(a) Die Abbildung

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0), [\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$$

ist wohldefiniert und ein Gruppenhomomorphismus.



(b) Ist $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ eine weitere stetige Abbildung zwischen punktierten topologischen Räumen, so gilt $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ als Abbildung von $\pi_1(X, x_0)$ nach $\pi_1(Z, z_0)$.

Beweis.

(a) Die Abbildung f_* ist wohldefiniert, denn aus $\alpha \simeq \beta \text{ rel } \{0, 1\}$ folgt nach Lemma 6.6 (b) sofort auch $f \circ \alpha \simeq f \circ \beta \text{ rel } \{0, 1\}$. Sie ist ein Gruppenhomomorphismus, denn nach Definition 7.1 sind sowohl $f \circ (\alpha \bullet \beta)$ als auch $(f \circ \alpha) \bullet (f \circ \beta)$ gleich dem Weg

$$I \rightarrow Y, x \mapsto \begin{cases} f(\alpha(2x)) & \text{für } x \leq \frac{1}{2}, \\ f(\beta(2x - 1)) & \text{für } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(b) Nach Definition gilt für alle $\alpha \in \Gamma(X, x_0)$

$$(g \circ f)_*([\alpha]) = [g \circ f \circ \alpha] = g_*([f \circ \alpha]) = g_*(f_*([\alpha])). \quad \square$$

Bemerkung 7.13 (Kategorien und Funktoren). Ihr kennt sicher schon viele mathematische Strukturen, in denen man zunächst gewisse Objekte und dann Morphismen zwischen diesen Objekten einführt und untersucht: z. B. Gruppen mit Gruppenhomomorphismen zwischen ihnen, Ringe mit Ringhomomorphismen, Körper mit Körperhomomorphismen, Vektorräume mit linearen Abbildungen, oder wie in dieser Vorlesung (punktierte) topologische Räume mit stetigen Abbildungen (die den gegebenen Basispunkt erhalten).

Bis zu einem gewissen Grad stellt man sich bei allen diesen Strukturen zunächst einmal immer die gleichen Fragen: Man möchte z. B. injektive und surjektive Abbildungen untersuchen sowie Isomorphismen einführen, Unter- und Quotientenstrukturen zur Verfügung haben oder Produkte konstruieren. Es ist daher natürlich naheliegend zu fragen, in wie weit man diese Konzepte abstrahieren und für alle diese Strukturen gemeinsam einführen und untersuchen kann.

Dies ist die zentrale Fragestellung der sogenannten *Kategorientheorie*. Ganz grob gesprochen definiert man dort eine *Kategorie* als etwas, das dadurch gegeben ist, dass man angibt, was die betrachteten Objekte und was die zugehörigen Morphismen sein sollen. So bilden also z. B. Gruppen, Vektorräume oder (punktierte) topologische Räume jeweils eine Kategorie.

Unsere Konstruktion der Fundamentalgruppe können wir nun als eine Art Abbildung zwischen der Kategorie der punktierten topologischen Räume und der Kategorie der Gruppen auffassen: Wir ordnen ja jedem punktierten topologischen Raum eine Gruppe zu. In Konstruktion 7.12 haben wir nun darüber hinaus gesehen, dass diese Zuordnung auch mit den Morphismen der jeweiligen Kategorien verträglich ist: Ein Morphismus zwischen zwei punktierten topologischen Räumen (also eine basispunkterhaltende stetige Abbildung zwischen ihnen) führt zu einem Morphismus der zugehörigen Fundamentalgruppen, und diese Operation ist wie in Lemma 7.12 (b) mit der Verkettung von Morphismen verträglich.

In diesem Sinne könnte man die Fundamentalgruppenkonstruktion also sogar als einen „Morphismus“ zwischen der Kategorie der punktierten topologischen Räume und der Kategorie der Gruppen ansehen: Sie ist eine Abbildung zwischen den beiden Kategorien, die mit der Struktur einer Kategorie (nämlich der Angabe, was die Morphismen sein sollen) verträglich ist. Um hier eine sprachliche Verwirrung zu vermeiden – man würde ja dann von Morphismen zwischen Kategorien reden, wobei Kategorien aber ihrerseits wieder Morphismen beinhalten – hat man sich jedoch entschieden, hier nicht von einem „Morphismus von Kategorien“ zu sprechen, sondern dafür einen anderen Namen einzuführen: Man bezeichnet eine derartige „strukturerehaltende Abbildung zwischen Kategorien“ wie z. B. die Fundamentalgruppe als einen *Funktor* zwischen den beiden Kategorien. Funktoren können damit also ganz verschiedene mathematische Gebiete (wie hier die Topologie und die Algebra) miteinander verbinden und somit zu interessanten Wechselwirkungen zwischen diesen Gebieten führen.

Wir wollen hier jedoch nicht weiter auf die Sprache der Kategorientheorie eingehen, da sie für uns außer einer abstrakteren und vielleicht etwas eleganteren Sprechweise keine weiteren Vorteile bringen würde.

Als Anwendung der Konstruktion 7.12 wollen wir aber zum Abschluss dieses Kapitels schließlich noch die Aussage zeigen, dass homotopieäquivalente Räume isomorphe Fundamentalgruppen besitzen. Weil Fundamentalgruppen letztlich Mengen von Homotopieklassen von Abbildungen sind, ist dies natürlich zu erwarten. Leider ist der exakte Beweis dieser Aussage aber trotzdem aufwendiger als erwartet, weil Fundamentalgruppen immer einen festgehaltenen Basispunkt benötigen, während ein solcher bei Homotopieäquivalenzen nicht existieren muss.

Satz 7.14 (Fundamentalgruppen homotopieäquivalenter Räume). *Es seien X und Y topologische Räume, sowie $x_0 \in X$.*

- (a) *Ist $f: X \rightarrow X$ homotop zur Identität auf X , so ist $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, f(x_0))$ ein Isomorphismus.*
- (b) *Ist $f: X \rightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ ein Isomorphismus.*

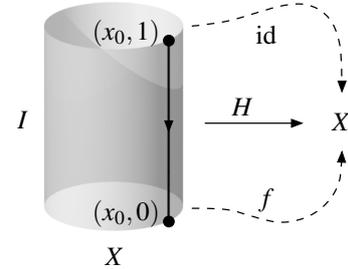
Insbesondere haben (wegzusammenhängende) homotopieäquivalente Räume also isomorphe Fundamentalgruppen.

Beweis.

- (a) Es sei $H: X \times I \rightarrow X$ eine Homotopie zwischen f und id_X , so dass also $H(\cdot, 0) = f$ und $H(\cdot, 1) = \text{id}_X$ gilt (die Abbildung rechts zeigt diese Situation im Fall $X = S^1$). Ferner sei

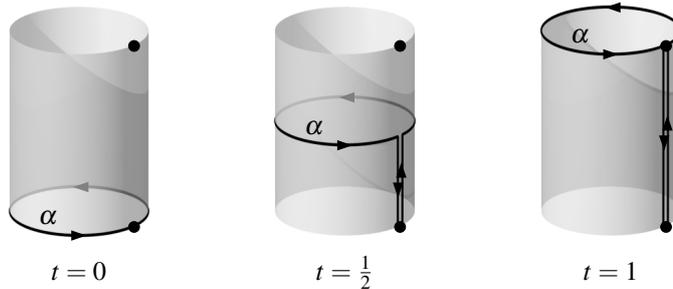
$$\gamma: I \rightarrow X, x \mapsto H(x_0, 1-x);$$

offensichtlich ist dies ein Weg in X von $H(x_0, 1) = x_0$ nach $H(x_0, 0) = f(x_0)$. In der Skizze ist er das Bild der senkrecht eingezeichneten Linie unter H .



Für einen gegebenen Weg $\alpha \in \Gamma(X, x_0)$ ist die Abbildung

$$(x, t) \mapsto \begin{cases} H(x_0, 3tx) & \text{für } x \leq \frac{1}{3}, \\ H(\alpha(3x-1), t) & \text{für } \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}, \\ H(x_0, 3t(1-x)) & \text{für } x \geq \frac{2}{3} \end{cases}$$



von $I \times I$ nach X nun eine Homotopie relativ $\{0, 1\}$ zwischen einer Umparametrisierung von $f \circ \alpha$ (für $t = 0$) und einer Umparametrisierung von $\gamma^{-1} \bullet (\alpha \bullet \gamma)$ (für $t = 1$); sie ist das Bild unter H der in der obigen Skizze eingezeichneten Deformation eines Weges in $X \times I$. Da Umparametrisierungen nach Lemma 7.2 (c) nichts an der Homotopieklasse ändern, ist also $[f \circ \alpha] = [\gamma^{-1}] \bullet [\alpha] \bullet [\gamma]$ in $\pi_1(X, f(x_0))$ – d. h. f_* stimmt mit der Abbildung

$$\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, f(x_0)), [\alpha] \mapsto [\gamma^{-1}] \bullet [\alpha] \bullet [\gamma]$$

überein, die nach Satz 7.8 ein Isomorphismus ist.

- (b) Es sei $g: Y \rightarrow X$ ein Homotopieinverses zu f . In der Sequenz

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, g(f(x_0))) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(g(f(x_0))))$$

gilt für die Verkettungen der ersten bzw. letzten beiden Abbildungen dann $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$ und $f_* \circ g_* = (f \circ g)_*$ nach Lemma 7.12 (b), wegen $g \circ f \simeq \text{id}_X$ und $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ sind diese beiden Verkettungen $g_* \circ f_*$ und $f_* \circ g_*$ nach (a) also Isomorphismen. Beachte dabei, dass hier zwar nur eine Abbildung g_* auftritt, die beiden mit f_* bezeichneten Abbildungen aufgrund der unterschiedlichen Basispunkte aber in der Regel verschieden sind.

Insgesamt ist die mittlere Abbildung g_* der obigen Sequenz damit sowohl surjektiv (weil $g_* \circ f_*$ surjektiv ist) als auch injektiv (weil $f_* \circ g_*$ injektiv ist), also ein Isomorphismus. Die erste Abbildung $f_* = (g_*)^{-1} \circ (g_* \circ f_*)$ ist also als Verkettung zweier Isomorphismen wie behauptet ebenfalls ein Isomorphismus. \square

Beispiel 7.15.

- (a) Ist X kontrahierbar, so ist X nach Bemerkung 6.9 (b) wegzusammenhängend, und nach Satz 7.14 ist $\pi_1(X)$ isomorph zur Fundamentalgruppe eines Punktes, also die triviale Gruppe.

Damit ist jeder kontrahierbare Raum einfach zusammenhängend. (Die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch nicht, wie wir in Bemerkung 8.22 sehen werden.)

- (b) Nach Beispiel 6.12 (b) ist die Kreislinie S^1 homotopieäquivalent zur gelochten Ebene $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Damit haben diese beiden Räume isomorphe Fundamentalgruppen. Ebenfalls die gleiche Fundamentalgruppe (nämlich \mathbb{Z} , siehe Beispiel 8.17 (a)) ergibt sich für jeden anderen dazu homotopieäquivalenten Raum, z. B. für jeden Kreisring $\{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq R\}$ mit $0 < r \leq R$.

Aufgabe 7.16. Es sei X eine *topologische Gruppe*, d. h. ein topologischer Raum, der gleichzeitig eine Gruppenstruktur hat, so dass die Verknüpfung $X \times X \rightarrow X$, $(a, b) \mapsto a \cdot b$ und die Inversenbildung $X \rightarrow X$, $a \mapsto a^{-1}$ stetig sind. Wie üblich bezeichne $e \in X$ das neutrale Element von X .

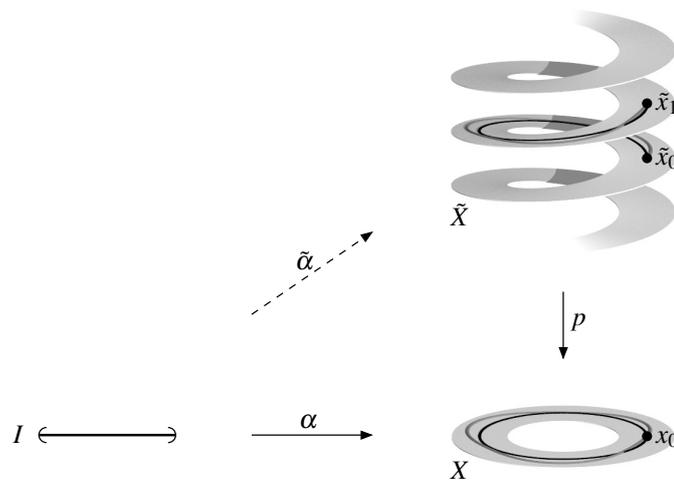
Zeige, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, e)$ dann abelsch ist. Welche der Gruppenaxiome werden im Beweis benötigt und welche nicht?

(Hinweis: Zeige und benutze die Gleichung $\alpha \bullet \beta = (\alpha \bullet \varepsilon) \cdot (\varepsilon \bullet \beta)$, wobei ε den konstanten Weg bei e bezeichnet.)

8. Überlagerungen

In den letzten beiden Kapiteln haben wir das Konzept von homotopen, also ineinander deformierbaren Abbildungen eingeführt, und daraus zu einem punktierten topologischen Raum (X, x_0) die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ konstruiert. Dabei war es meistens recht einfach zu zeigen, dass zwei Abbildungen homotop zueinander sind: Man kann hier in der Regel einfach eine Homotopie zwischen ihnen konkret angeben. Wenn zwei Abbildungen jedoch nicht zueinander homotop sind, ist dies zwar oftmals auch anschaulich leicht einzusehen, aber viel schwieriger zu beweisen. Unser Standardbeispiel hierfür war die sofort einleuchtende, aber bisher noch unbewiesene Aussage aus Beispiel 6.3 (c), dass es Abbildungen $S^1 \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt, die nicht homotop zu einer konstanten Abbildung sind – und dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ demzufolge nicht trivial ist (siehe Beispiel 7.6). Wir wollen in diesem Kapitel nun sehen, wie man diese und ähnliche Aussagen exakt beweisen kann. Da dies an manchen Stellen etwas technisch wird, wollen wir zunächst die Beweisidee klar heraus stellen.

Bemerkung 8.1 (Idee der Überlagerungen). Wie im Bild unten seien $X = \{z \in \mathbb{C} : r \leq |z| \leq R\}$ ein Kreisring in \mathbb{C} und $x_0 \in X$. Ferner sei $\alpha: I \rightarrow X$ ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt x_0 – im Bild unten ist ein solcher Weg, der einmal um das „Loch“ in X herum läuft, schwarz eingezeichnet. Wir wollen zeigen, dass diese Schleife in X nicht zu einem Punkt zusammengezogen werden kann, also α nicht homotop relativ $\{0, 1\}$ zu einer konstanten Abbildung ist.



Wir betrachten dazu die im Bild dargestellte Spirale \tilde{X} mit ihrer Projektion p auf X , also z. B.

$$\tilde{X} = [r, R] \times \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad p: \tilde{X} \rightarrow X, (u, v) \mapsto u e^{2\pi i v},$$

und wählen einen Punkt $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Man nennt diese Situation eine *Überlagerung* von X (Definition 8.2). Die Idee ist nun, eine „Hochhebung“ $\tilde{\alpha}$ des Weges α nach \tilde{X} zu suchen, also einen Weg $\tilde{\alpha}: I \rightarrow \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, der in \tilde{x}_0 beginnt. Mit anderen Worten soll $\tilde{\alpha}(t)$ also im Bild oben für alle t direkt über $\alpha(t)$ liegen. Wir werden nun in diesem Kapitel die folgenden Aussagen zeigen, die aus dem Bild bereits anschaulich zu erwarten sind:

- (a) Eine solche Hochhebung existiert stets, und ist auch eindeutig (Folgerung 8.12 (a)). Sie ist jedoch in der Regel wie im Bild oben kein geschlossener Weg in \tilde{X} , sondern endet an irgendeinem Punkt \tilde{x}_1 mit $p(\tilde{x}_1) = x_0$ – abhängig davon, „wie oft α um das Loch in X herumläuft“.

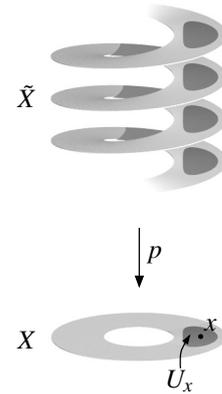
- (b) Deformiert man den Weg α relativ $\{0, 1\}$ (wie etwa im Bild zu dem grau eingezeichneten Weg), so „deformiert die Hochhebung mit“ und behält dabei den gleichen Endpunkt \tilde{x}_1 (Folgerung 8.12 (b)).

Auf diese Art erhalten wir also eine wohldefinierte Abbildung, die jeder Homotopieklasse $[\alpha]$ in $\pi_1(X, x_0)$ den Endpunkt $\tilde{\alpha}(1)$ der Hochhebung $\tilde{\alpha}$ zuordnet. Sind diese Endpunkte bei zwei Wegen verschieden – im Bild oben z. B. \tilde{x}_1 für den eingezeichneten Weg und \tilde{x}_0 für einen konstanten Weg – so können die beiden Wege also nicht homotop relativ $\{0, 1\}$ sein und definieren damit auch unterschiedliche Elemente in der Fundamentalgruppe. Bei geeigneter Wahl der Überlagerung, z. B. im Beispiel oben, ist die obige Abbildung von $\pi_1(X, x_0)$ nach $p^{-1}(\{x_0\})$ sogar bijektiv (Satz 8.16), so dass wir auf diese Art auch die Fundamentalgruppe als Urbild von x_0 unter p berechnen können. Im Beispiel ergibt sich damit $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}$ (Beispiel 8.17 (a)); die Homotopieklasse eines Weges gibt gerade seine Umlaufzahl um das Loch in X an.

10

Das Ziel dieses Kapitels ist es, diese Überlegungen in eine mathematisch exakte Sprechweise zu übersetzen. Dazu müssen wir zunächst definieren, was wir unter einer Überlagerung $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ verstehen wollen. Die wesentliche Eigenschaft in Bemerkung 8.1 oben war dabei, dass \tilde{X} um jeden Punkt lokal genauso aussieht wie X um den entsprechenden Bildpunkt. Dies ist der Inhalt der folgenden Definition.

Definition 8.2 (Überlagerungen). Eine stetige Abbildung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ heißt **Überlagerung**, wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U_x von x in X gibt, so dass das Urbild $p^{-1}(U_x)$ wie im Bild rechts dunkel eingezeichnet eine disjunkte Vereinigung offener Teilmengen von \tilde{X} ist, die unter p homöomorph auf U_x abgebildet werden. Man nennt diese offenen Teilmengen von \tilde{X} die (lokalen) **Blätter** der Überlagerung; die Urbildmenge $p^{-1}(\{x\})$ wird **Faser** von p über x genannt. Man sagt auch, dass p über U_x eine **triviale Überlagerung** ist.



Ein solches Bild haben wir bereits in Beispiel 5.23 in Form der Restklassenabbildung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ gesehen. In der Tat werden praktisch alle unsere Überlagerungen derartige Restklassenabbildungen von Gruppenoperationen sein. Wir wollen daher jetzt allgemein untersuchen, welche Bedingungen eine Gruppenoperation erfüllen muss, um auf diese Art zu einer Überlagerung zu führen.

Definition 8.3 (Freie und frei diskontinuierliche Gruppenoperationen). Eine Gruppe G mit neutralem Element e operiere (stetig wie in Bemerkung 5.22) auf einem topologischen Raum \tilde{X} . Dann heißt die Gruppenoperation ...

- (a) **frei**, wenn für alle $a \in \tilde{X}$ gilt, dass $a \neq g \cdot a$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$.
 (b) **frei diskontinuierlich** (manchmal in der Literatur auch *eigentlich diskontinuierlich*), wenn für alle $a \in \tilde{X}$ sogar eine offene Umgebung U_a von a in \tilde{X} existiert, so dass $U_a \cap g \cdot U_a = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus \{e\}$.

Lemma 8.4 (Überlagerungen aus frei diskontinuierlichen Operationen). Eine Gruppe G operiere auf einem topologischen Raum \tilde{X} . Wir bezeichnen die zugehörige Restklassenabbildung wie in Definition 5.21 mit $p: \tilde{X} \rightarrow X := \tilde{X}/G$.

- (a) Ist die Gruppenoperation frei, so ist für alle $a \in \tilde{X}$ die Abbildung $G \rightarrow p^{-1}(\bar{a})$, $g \mapsto g \cdot a$ bijektiv.
 (b) Ist die Gruppenoperation sogar frei diskontinuierlich, so ist p eine Überlagerung.

Beweis.

- (a) Nach Definition von \tilde{X}/G ist $p^{-1}(\bar{a}) = \{g \cdot a : g \in G\}$, d. h. die gegebene Abbildung ist surjektiv.

Sie ist auch injektiv, denn aus $g \cdot a = h \cdot a$ mit $g, h \in G$ folgt $a = g^{-1} \cdot h \cdot a$ und somit nach Definition 8.3 (a) auch $g^{-1} \cdot h = e$, also $g = h$.

- (b) Für $\bar{a} \in X$, also $a \in \tilde{X}$, sei U_a eine offene Umgebung von a in \tilde{X} wie in Definition 8.3 (b). Wir behaupten, dass p dann über $\bar{U}_a = p(U_a)$ eine triviale Überlagerung ist: Es gilt zunächst

$$p^{-1}(\bar{U}_a) = \{g \cdot x : g \in G, x \in U_a\} = \bigcup_{g \in G} g \cdot U_a,$$

und die nach Bemerkung 5.22 offenen Mengen $g \cdot U_a$ vereinigen sich wegen

$$(g \cdot U_a) \cap (h \cdot U_a) = g(U_a \cap \underbrace{(g^{-1} \cdot h)}_{\neq e} \cdot U_a) = \emptyset \quad \text{für } g, h \in G \text{ mit } g \neq h$$

disjunkt zu $p^{-1}(\bar{U}_a)$. Damit ist die Einschränkung $p|_{g \cdot U_a} : g \cdot U_a \rightarrow \bar{U}_a, g \cdot x \mapsto \bar{x}$ auch bijektiv. Sie bildet weiterhin offene Mengen auf offene Mengen ab: Für eine offene Menge V in $g \cdot U$ ist auch V offen in \tilde{X} , also auch $p^{-1}(p(V)) = \bigcup_{h \in G} h \cdot V$ in \tilde{X} und damit nach Definition der Quotiententopologie $p(V)$ in X . Daher ist sie ein Homöomorphismus, d. h. p ist eine Überlagerung. \square

Aufgabe 8.5. Es sei \tilde{X} ein Hausdorff-Raum. Man zeige:

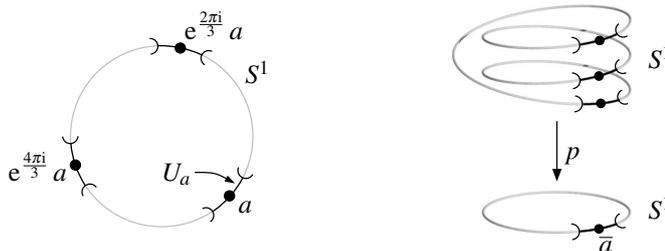
- (a) Operiert eine endliche Gruppe frei auf \tilde{X} , so ist diese Gruppenoperation auch frei diskontinuierlich (so dass die Quotientenabbildung $\pi : \tilde{X} \rightarrow X := \tilde{X}/G$ also eine Überlagerung ist).
- (b) Für unendliche Gruppen ist dies im Allgemeinen falsch.

Beispiel 8.6.

- (a) Die Gruppenoperation von $(\mathbb{Z}, +)$ auf \mathbb{R} durch Addition wie in Beispiel 5.23 ist frei diskontinuierlich, denn für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $U_a = (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ eine offene Umgebung mit $U_a \cap (g + U_a) = \emptyset$ für alle $g \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Also ist die Quotientenabbildung $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ nach Lemma 8.4 eine Überlagerung – was aus dem Bild in Beispiel 5.23 ja auch anschaulich erkennbar ist.
- (b) Für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ operiere die Gruppe \mathbb{Z}_n auf $S^1 \subset \mathbb{C}$ durch

$$\bar{k} \cdot a := e^{2\pi i \frac{k}{n}} a \quad \text{für } \bar{k} \in \mathbb{Z}_n \text{ und } a \in S^1.$$

Die Bahn eines Elements $a \in S^1$ besteht also – wie im Bild unten links für $n = 3$ dargestellt – aus den Ecken eines regelmäßigen n -Ecks im Einheitskreis.



Offensichtlich ist diese Operation frei, denn es ist $a \neq e^{2\pi i \frac{k}{n}} a$ für alle $\bar{k} \neq \bar{0} \in \mathbb{Z}_n$. Sie ist damit nach Aufgabe 8.5 (a) auch frei diskontinuierlich. Natürlich könnte man dies auch direkt sehen: Für eine genügend kleine Umgebung U_a von a wie im Bild oben sind die offenen Mengen $U_a, e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot U_a$ und $e^{\frac{4\pi i}{3}} \cdot U_a$ disjunkt.

Das zugehörige Bild der Überlagerung $p : S^1 \rightarrow S^1/\mathbb{Z}_n$ ist im Bild oben rechts dargestellt: Nachdem man ein n -tel des Einheitskreises durchlaufen hat, ist man im Quotientenraum wieder am Anfangspunkt angelangt. Wie in Beispiel 5.23 folgt damit, dass $S^1/\mathbb{Z}_n \cong S^1$ mit dem Homöomorphismus $S^1/\mathbb{Z}_n \rightarrow S^1, \bar{a} \mapsto a^n$. Unter diesem Homöomorphismus ist die Überlagerungsabbildung damit also einfach $p : S^1 \rightarrow S^1, a \mapsto a^n$.

- (c) In Konstruktion 5.24 (a) haben wir gesehen, dass die reelle projektive Ebene als $\mathbb{P}^2 \cong S^2/\mathbb{Z}_2$ geschrieben werden kann, wobei $\mathbb{Z}_2 \cong (\{\pm 1\}, \cdot)$ auf S^2 durch Multiplikation operiert, also gegenüberliegende Punkte identifiziert. Da diese Operation frei ist, ist sie nach Aufgabe 8.5 (a) auch frei diskontinuierlich, und die Quotientenabbildung $p: S^2 \rightarrow S^2/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{P}^2$ ist nach Lemma 8.4 eine Überlagerung.

Bemerkung 8.7 (Grad einer Überlagerung). Für eine Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sei

$$V_n := \{x \in X : |p^{-1}(\{x\})| = n\} \subset X$$

die Menge aller Punkte in X , über denen die Faser von p genau n Elemente hat. Nach der Definition einer Überlagerung ist V_n offen: Ist nämlich $x \in V_n$ und U_x eine offene Umgebung von x , über der die Überlagerung p trivial ist, so besteht $p^{-1}(U_x)$ aus genau n Blättern, die durch p homöomorph auf U_x abgebildet werden. Dies bedeutet aber gerade, dass jeder Punkt in U_x genau n Urbilder unter p hat, also in V_n liegt. Also gilt $U_x \subset V_n$, d. h. V_n ist offen.

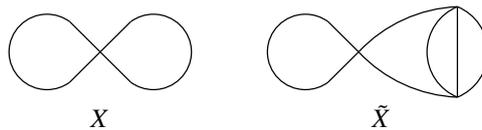
Weiterhin bilden die Mengen V_n für $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ offensichtlich eine disjunkte Zerlegung von X . Ist X zusammenhängend, so kann man X nach Definition 3.1 (b) aber nicht auf nicht-triviale Art als disjunkte Vereinigung von offenen Mengen schreiben. Also ist dann nur ein V_n nicht-leer, und damit gleich X : Jede Faser von p hat dann die gleiche Anzahl n von Elementen. Man nennt dieses n den **Grad** der Überlagerung.

Bei einer Überlagerung der Form $p: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G$ wie in Lemma 8.4 ist der Grad offensichtlich gleich $|G|$, da alle Fasern bijektiv zu G sind. In den drei Fällen von Beispiel 8.6 ist der Grad also gleich ∞ , n bzw. 2.

Aufgabe 8.8.

- (a) Zeige, dass jede Überlagerung vom Grad 2 von der Form $p: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\mathbb{Z}_2$ für eine geeignete frei diskontinuierliche Gruppenoperation von \mathbb{Z}_2 auf einem topologischen Raum \tilde{X} ist.
- (b) Es seien nun X und \tilde{X} die „eindimensionalen“ Räume, die durch Verkleben von zwei bzw. sechs Intervallen an ihren Endpunkten wie im Bild unten entstehen.

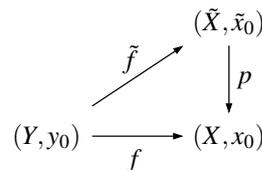
Zeige, dass es eine Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ gibt, aber dass diese Überlagerung nicht von der Form $p: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G$ für eine geeignete Operation einer Gruppe G auf \tilde{X} sein kann.



Wie in der Einleitung zu diesem Kapitel erläutert wollen wir zu einer Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ und einer Abbildung $f: Y \rightarrow X$ nun Hochhebungen $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ betrachten.

Definition 8.9 (Hochhebungen).

- (a) Es sei $p: \tilde{X} \rightarrow X$ eine Überlagerung und $f: Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung von einem weiteren topologischen Raum Y nach X . Dann heißt eine stetige Abbildung $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ eine **Hochhebung** (oder auch **Liftung**) von f , wenn $p \circ \tilde{f} = f$.
- (b) Sind zusätzlich $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ Punkte mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$ und $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ (also auch $f(y_0) = x_0$), so nennen wir die Abbildung $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ auch eine Überlagerung von punktierten Räumen, und dementsprechend $\tilde{f}: (Y, y_0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ eine Hochhebung von $f: (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$.



Unser Ziel ist es, im Fall eines Einheitswürfels $Y = I^n$ als Startraum die Existenz und Eindeutigkeit solcher Hochhebungen zu beweisen. Dazu benötigen wir zunächst ein Lemma.

Lemma 8.10 (Lemma von Lebesgue). *Es sei $(U_i)_{i \in J}$ eine offene Überdeckung eines kompakten metrischen Raumes X . Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass jede offene ε -Kugel (mit beliebigem Mittelpunkt) in X bereits in einem U_i enthalten ist.*

Man nennt ein solches ε eine **Lebesgue-Zahl** der Überdeckung.

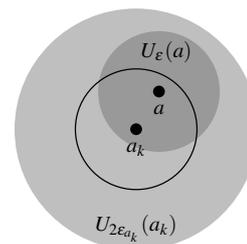
Beweis. Da die Mengen U_i eine offene Überdeckung von X bilden, gibt es zu jedem $a \in X$ ein $\varepsilon_a \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass die offene Kugel $U_{2\varepsilon_a}(a)$ um a mit Radius $2\varepsilon_a$ ganz in einem U_i liegt.

Die Kugeln $U_{\varepsilon_a}(a)$ mit dem jeweils halben Radius bilden dann eine offene Überdeckung von X . Weil X kompakt ist, können wir aus ihnen eine endliche Teilüberdeckung $U_{\varepsilon_{a_1}}(a_1) \cup \dots \cup U_{\varepsilon_{a_n}}(a_n)$ auswählen. Weiterhin setzen wir $\varepsilon := \min(\varepsilon_{a_1}, \dots, \varepsilon_{a_n})$.

Ist nun $a \in X$ beliebig, so ist zunächst $a \in U_{\varepsilon_{a_k}}(a_k)$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$, da diese offenen Mengen X überdecken. Für dieses k gilt dann aber $U_\varepsilon(a) \subset U_{2\varepsilon_{a_k}}(a_k)$, denn für alle $x \in U_\varepsilon(a)$ ist

$$d(x, a_k) \leq d(x, a) + d(a, a_k) < \varepsilon + \varepsilon_{a_k} \leq 2\varepsilon_{a_k}.$$

Da $U_{2\varepsilon_{a_k}}(a_k)$ nach Konstruktion in einer der offenen Mengen U_i der gegebenen Überdeckung liegt, gilt dies also wie behauptet auch für die Kugel $U_\varepsilon(a)$. □

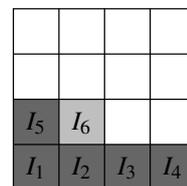


Satz 8.11 (Existenz und Eindeutigkeit von Hochhebungen). *Es seien $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung und $f: (I^n, 0) \rightarrow (X, x_0)$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es genau eine Hochhebung $\tilde{f}: (I^n, 0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ von f bezüglich p .*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, in dem das Bild $f(I^n)$ ganz in einer offenen Menge $U \subset X$ enthalten ist, über der p eine triviale Überlagerung ist. Dann ist die Aussage des Satzes klar: Ist $V \subset p^{-1}(U)$ das Blatt der Überlagerung, in dem \tilde{x}_0 liegt, so können und müssen wir f natürlich durch $\tilde{f} := (p|_V)^{-1} \circ f$ in dieses Blatt hinein fortsetzen (diese Fortsetzung ist möglich, da $p|_V$ nach Definition 8.2 ein Homöomorphismus ist; und wir können das Bild von f nicht auf verschiedene Blätter aufteilen, da $f(I^n)$ sonst im Widerspruch zu Lemma 3.6 (b) unzusammenhängend wäre).

Im allgemeinen Fall wählen wir zunächst zu jedem Punkt $a \in X$ eine offene Umgebung U_a wie in Definition 8.2, über der p trivial überlagert. Dann bilden diese Mengen eine offene Überdeckung von X , und die Mengen $f^{-1}(U_a)$ damit eine offene Überdeckung des kompakten Einheitswürfels I^n . Nach Lemma 8.10 gibt es zu dieser Überdeckung von I^n eine Lebesgue-Zahl ε . Wir unterteilen I^n nun wie im Bild unten rechts in k^n Teilwürfel I_1, \dots, I_{k^n} der Kantenlänge $\frac{1}{k}$, so dass jeder dieser kleineren Würfel in einer ε -Kugel enthalten ist und nach Wahl von ε damit von f ganz in eine offene Menge abgebildet wird, über der p eine triviale Überlagerung ist.

Damit können wir die gesuchte Hochhebung \tilde{f} nun der Reihe nach auf I_1, \dots, I_{k^n} konstruieren (die genaue Reihenfolge spielt dabei keine Rolle, solange wir „von links unten nach rechts oben“ vorgehen, also für alle $m = 1, \dots, k^n$ die Teilwürfel mit sämtlich kleineren Koordinaten als I_m einen kleineren Index als m haben). Für jeden dieser Teilwürfel ist dann das Bild der gesuchten Hochhebung an der linken unteren Ecke bekannt – für $m = 1$ ist dies \tilde{x}_0 , und für $m > 1$ ist es bestimmt durch die Hochhebungen der vorherigen Würfel.



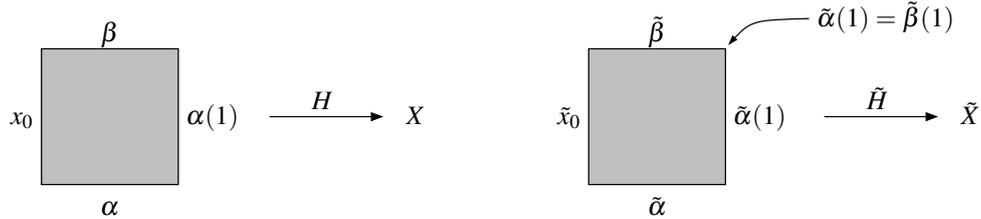
In jedem Schritt existiert also nach dem am Anfang betrachteten Fall eine eindeutige Hochhebung von f auf I_m mit dem vorgegebenen Anfangspunkt. Aus demselben Grund stimmt diese Hochhebung auf den Schnittmengen von I_m mit den vorherigen Würfeln überein, da diese Schnittmengen selbst Würfel (kleinerer Dimension) sind, die ganz in einer offenen Teilmenge von X liegen, über denen p eine triviale Überlagerung ist. Insgesamt erhalten wir mit Aufgabe 2.8 (b) also eine eindeutige stetige Hochhebung \tilde{f} von f auf I^n . □

Folgerung 8.12 (Hochhebung von Wegen). *Es seien $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung und $\alpha: (I, 0) \rightarrow (X, x_0)$ ein Weg in X mit Startpunkt x_0 . Dann gilt:*

- (a) Es gibt genau eine Hochhebung $\tilde{\alpha}: (I, 0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ von α bezüglich p .
- (b) Ist $\beta: (I, 0) \rightarrow (X, x_0)$ ein weiterer Weg mit $\alpha(1) = \beta(1)$ und $\alpha \simeq \beta \text{ rel } \{0, 1\}$, so gilt auch $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ und $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta} \text{ rel } \{0, 1\}$.

Beweis.

- (a) ist genau die Aussage von Satz 8.11 für $n = 1$.
- (b) Es sei $H: (I \times I, 0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Homotopie relativ $\{0, 1\}$ zwischen α und β . Die Bilder von H auf dem Rand des Einheitsquadrats sind im folgenden Bild links dargestellt.



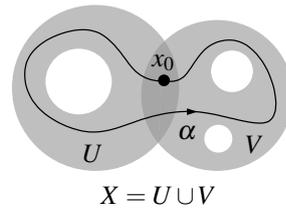
Nach Satz 8.11 für $n = 2$ gibt es nun eine eindeutige Hochhebung $\tilde{H}: (I \times I, 0) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ von H . Wegen der Eindeutigkeit von Hochhebungen auf Intervallen kennen wir wie im Bild oben rechts auch die Bilder von \tilde{H} auf dem Rand des Einheitsquadrats: An der linken Kante müssen wir (als Hochhebung der konstanten Abbildung x_0) die konstante Abbildung \tilde{x}_0 haben, und damit an der oberen Kante (als Hochhebung von β mit Anfangspunkt \tilde{x}_0) den Weg $\tilde{\beta}$. Analog ist die untere Kante der Weg $\tilde{\alpha}$, und die rechte damit der konstante Weg $\tilde{\alpha}(1)$.

Also ist $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ und \tilde{H} eine Homotopie zwischen $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ relativ $\{0, 1\}$. □

Bemerkung 8.13. Folgerung 8.12 bedeutet insbesondere, dass im Fall einer Überlagerung die Abbildung $p_*: \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ aus Konstruktion 7.12 injektiv ist: Ist $[p \circ \tilde{\alpha}] = [p \circ \tilde{\beta}]$ in $\pi_1(X, x_0)$ für gewisse $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \Gamma(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, also $p \circ \tilde{\alpha} \simeq p \circ \tilde{\beta} \text{ rel } \{0, 1\}$, so gilt nach Folgerung 8.12 (b) auch $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta} \text{ rel } \{0, 1\}$ (und damit $[\tilde{\alpha}] = [\tilde{\beta}]$ in $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$), da $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ natürlich die Hochhebungen von $p \circ \tilde{\alpha}$ bzw. $p \circ \tilde{\beta}$ sind.

Aufgabe 8.14. Es seien U und V offene Teilmengen eines topologischen Raumes X mit $U \cup V = X$. Ferner sei $U \cap V$ wegzusammenhängend und $x_0 \in U \cap V$. Man zeige:

- (a) Zu jedem geschlossenen Weg $\alpha \in \Gamma(X, x_0)$ gibt es geschlossene Wege $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Gamma(X, x_0)$, die alle komplett in U oder komplett in V liegen, so dass $[\alpha] = [\alpha_1] \bullet \dots \bullet [\alpha_n] \in \pi_1(X, x_0)$ gilt. (Hinweis: Das Lemma 8.10 von Lebesgue ist hierfür nützlich.)
- (b) Ist $\pi_1(U, x_0) = \pi_1(V, x_0) = \{1\}$, so ist auch $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$.
- (c) $\pi_1(S^n) = \{1\}$ für alle $n \geq 2$.



Dies ist ein einfacher erster Fall des Satzes von Seifert und van Kampen (siehe Satz 9.8 und Beispiel 9.10).

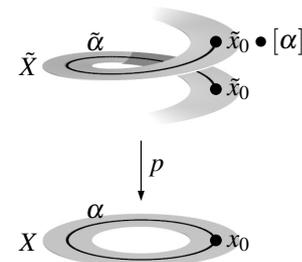
Die eindeutige Hochhebung von Wegen ermöglicht nun die folgende Konstruktion:

Konstruktion 8.15 (Fasertransport). Es sei $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung.

- (a) Nach Folgerung 8.12 gibt es eine wohldefinierte Abbildung

$$\pi_1(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(\{x_0\}), [\alpha] \mapsto \tilde{\alpha}(1) =: \tilde{x}_0 \bullet [\alpha],$$

die wir den **Fasertransport** zu p nennen. Zu jeder Homotopieklasse eines geschlossenen Weges α in X bei x_0 ist $\tilde{x}_0 \bullet [\alpha]$ also wie im Bild rechts der Endpunkt in \tilde{X} , den man erhält, wenn man an \tilde{x}_0 die eindeutige Hochhebung $\tilde{\alpha}$ von α ansetzt.



- (b) Ist p die Quotientenabbildung einer frei diskontinuierlichen Operation einer Gruppe G auf \tilde{X} wie in Lemma 8.4, so ist die Abbildung $G \rightarrow p^{-1}(\{x_0\})$, $g \mapsto g \cdot \tilde{x}_0$ bijektiv. Verketteten wir den Fasertransport aus (a) mit dem Inversen dieser Bijektion, erhalten wir also eine Abbildung

$$h: \pi_1(X, x_0) \rightarrow G \quad \text{definiert durch} \quad \tilde{x}_0 \bullet [\alpha] = h([\alpha]) \cdot \tilde{x}_0 \quad \text{für alle } \alpha \in \Gamma(X, x_0).$$

Wir werden im Folgenden auch diese Abbildung als Fasertransport bezeichnen, da sie sich von (a) nur dadurch unterscheidet, dass wir die Faser $p^{-1}(\{x_0\})$ mit G identifiziert haben.

Wir können nun unser Hauptergebnis zur Berechnung von Fundamentalgruppen beweisen.

Satz 8.16 (Fundamentalgruppen aus Überlagerungen). *Es seien G eine Gruppe, die frei diskontinuierlich auf einem topologischen Raum \tilde{X} operiert, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, und $p: (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow (X, x_0)$ mit $X = \tilde{X}/G$ und $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ die zugehörige Quotientenabbildung. Dann gilt für die Fasertransportabbildung $h: \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$ aus Konstruktion 8.15 (b):*

- (a) Die Abbildung h ist ein Gruppenhomomorphismus;
- (b) $\text{Im } h = \{g \in G : \tilde{x}_0 \text{ und } g \cdot \tilde{x}_0 \text{ liegen in derselben Wegzusammenhangskomponente}\}$;
- (c) $\text{Ker } h = p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

Ist insbesondere \tilde{X} einfach zusammenhängend, so ist die Abbildung h also ein Isomorphismus, und damit $\pi_1(X, x_0) \cong G$.

Beweis.

- (a) Beachte zunächst, dass
 - (i) $\tilde{x}_0 \bullet ([\alpha] \bullet [\beta]) = (\tilde{x}_0 \bullet [\alpha]) \bullet [\beta]$, da beide Seiten gleich dem Endpunkt in \tilde{X} sind, wenn man an \tilde{x}_0 zunächst die Hochhebung von $[\alpha]$ und daran dann die von $[\beta]$ ansetzt.
 - (ii) $(g \cdot \tilde{x}_0) \bullet [\alpha] = g \cdot (\tilde{x}_0 \bullet [\alpha])$, denn ist $\tilde{\alpha}$ die Hochhebung von $\alpha \in \Gamma(X, x_0)$ mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$, so ist $t \mapsto g \cdot \tilde{\alpha}(t)$ die Hochhebung von α mit Anfangspunkt $g \cdot \tilde{\alpha}(0) = g \cdot \tilde{x}_0$. Deren Endpunkt $(g \cdot \tilde{x}_0) \bullet [\alpha]$ ist aber $g \cdot \tilde{\alpha}(1) = g \cdot (\tilde{x}_0 \bullet [\alpha])$.

Damit folgt nun

$$\begin{aligned} h([\alpha] \bullet [\beta]) \cdot \tilde{x}_0 &= \tilde{x}_0 \bullet ([\alpha] \bullet [\beta]) \stackrel{(i)}{=} (\tilde{x}_0 \bullet [\alpha]) \bullet [\beta] = (h([\alpha]) \cdot \tilde{x}_0) \bullet [\beta] \stackrel{(ii)}{=} h([\alpha]) \cdot (\tilde{x}_0 \bullet [\beta]) \\ &= h([\alpha]) \cdot h([\beta]) \cdot \tilde{x}_0, \end{aligned}$$

also wie behauptet $h([\alpha] \bullet [\beta]) = h([\alpha]) \cdot h([\beta])$.

- (b) „ \subset “: Ist $g \in G$ mit $g = h([\alpha])$ für einen Weg α , also $g \cdot \tilde{x}_0 = \tilde{x}_0 \bullet [\alpha]$, so verbindet die Hochhebung von α die Punkte \tilde{x}_0 und $g \cdot \tilde{x}_0$ miteinander.

„ \supset “: Es sei nun umgekehrt $\tilde{\alpha}$ ein Weg in \tilde{X} von \tilde{x}_0 nach $g \cdot \tilde{x}_0$. Dann ist $\tilde{\alpha}$ die Hochhebung des geschlossenen Weges $\alpha := p \circ \tilde{\alpha}$ mit Anfangspunkt \tilde{x}_0 . Also ist $g \cdot \tilde{x}_0 = \tilde{x}_0 \bullet [\alpha]$ und damit $h([\alpha]) = g$.

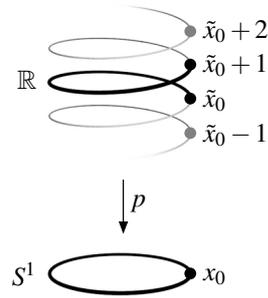
- (c) „ \subset “: Es sei $\alpha \in \Gamma(X, x_0)$ mit $h([\alpha]) = e$, also $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_0 \bullet [\alpha]$. Die Hochhebung $\tilde{\alpha}$ von α mit Anfangspunkt \tilde{x}_0 ist damit ein geschlossener Weg und definiert ein Element $[\tilde{\alpha}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ mit $[\alpha] = [p \circ \tilde{\alpha}] = p_* [\tilde{\alpha}] \in p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$.

„ \supset “: Eine Homotopieklasse in $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ hat die Form $[p \circ \tilde{\alpha}]$ für einen geschlossenen Weg $\tilde{\alpha} \in \Gamma(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$. Da $\tilde{\alpha}$ dann die Hochhebung von $p \circ \tilde{\alpha}$ mit Anfangspunkt \tilde{x}_0 ist, gilt $h([p \circ \tilde{\alpha}]) \cdot \tilde{x}_0 = \tilde{x}_0 \bullet [p \circ \tilde{\alpha}] = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_0$ und damit $h([p \circ \tilde{\alpha}]) = e$. \square

Beispiel 8.17.

- (a) Nach Beispiel 8.6 (a) operiert \mathbb{Z} auf \mathbb{R} durch Addition frei diskontinuierlich mit $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$. Da \mathbb{R} einfach zusammenhängend ist, folgt aus Satz 8.16 also wie erwartet $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Der Satz zeigt auch, dass ein konkreter Isomorphismus $h: \pi_1(S^1, x_0) \rightarrow \mathbb{Z}$ durch den Fasertransport gegeben ist: Für einen geschlossenen Weg $\alpha \in \Gamma(S^1, x_0)$ ist $h([\alpha])$ die ganze Zahl n mit $\tilde{x}_0 \bullet [\alpha] = n + \tilde{x}_0$, d. h. so dass die Hochhebung von α nach \mathbb{R} mit Anfangspunkt \tilde{x}_0 im Punkt $n + \tilde{x}_0$ endet – im Bild rechts also $n = 1$. Da diese Zahl offensichtlich angibt, wie oft α um die Kreislinie S^1 herum läuft, nennt man sie auch die *Umlaufzahl* von α .



Für den konkret im Bild eingezeichneten Weg, der einmal um die Kreislinie herum läuft, bedeutet dies also, dass er nicht homotop relativ $\{0, 1\}$ zu einem konstanten Weg ist, da seine Umlaufzahl 1 ist und nicht 0. Dies ist äquivalent dazu, dass die Identität id_{S^1} nicht homotop relativ $\{1\}$ zur konstanten Abbildung 1 ist (siehe Bemerkung 7.5 (b)), und damit nach Aufgabe 6.4 auch im nicht-relativen Sinne nicht homotop zu einer konstanten Abbildung.

Wir haben hiermit nun also zum ersten Mal formal beweisen können, dass zwei Abbildungen nicht homotop sind, bzw. dass die Fundamentalgruppe eines Raumes nicht-trivial ist, und der Raum damit also weder einfach zusammenhängend noch kontrahierbar ist (siehe Beispiel 7.15 (a)). Dasselbe gilt nach Satz 7.14 dann natürlich auch für jeden zur Kreislinie homotopieäquivalenten Raum, etwa für $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ oder den Kreisring in der Einleitung dieses Kapitels.

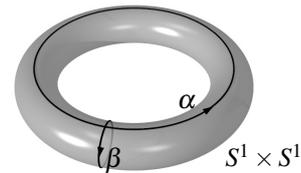
- (b) Die Fundamentalgruppe des Torus $S^1 \times S^1$ aus Beispiel 5.9 (c) ist nach Aufgabe 7.7

$$\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Alternativ erhalten wir dies auch direkt aus Satz 8.16 mit der Darstellung

$$S^1 \times S^1 \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) / (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}),$$

da $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ durch Addition frei diskontinuierlich auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ operiert und $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ einfach zusammenhängend ist. Die beiden Erzeuger der Fundamentalgruppe, also $(1, 0)$ und $(0, 1)$ in der Darstellung als $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, sind genau die Schleifen entlang einer der beiden Faktoren $S^1 \times S^1$, also die Homotopieklassen der im Bild rechts eingezeichneten Wege α und β .



- (c) Die reelle projektive Ebene lässt sich nach Beispiel 8.6 (c) gemäß $\mathbb{P}^2 \cong S^2/\mathbb{Z}_2$ als Quotient einer frei diskontinuierlichen Gruppenoperation schreiben. Da S^2 nach Aufgabe 8.14 (c) einfach zusammenhängend ist, ist die Fundamentalgruppe von \mathbb{P}^2 nach Satz 8.16 also $\pi_1(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}_2$. Entsprechend unserer Interpretation durch den Fasertransport wird das nicht-triviale Element dieser Fundamentalgruppe durch einen geschlossenen Weg in \mathbb{P}^2 repräsentiert, dessen Hochhebung zwei identifizierte Punkte im Quotienten S^2/\mathbb{Z}^2 , also zwei gegenüber liegende Punkte in S^2 miteinander verbindet – so wie der in der Einleitung von Kapitel 6 beschriebene Weg in \mathbb{P}^2 .

Beispiel 8.18 ($\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^n$ für $n > 2$). In Ergänzung zu Beispiel 2.17 (b) und 3.9 (a) können wir nun auch zeigen, dass \mathbb{R}^2 nicht zu \mathbb{R}^n mit $n > 2$ homöomorph ist: Wäre $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein solcher Homöomorphismus, so auch die Einschränkung $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$. Nach Beispiel 6.12 (b) sind aber S^1 und S^{n-1} Deformationsretrakte von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ bzw. $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$, und damit wären S^1 und S^{n-1} dann homotopieäquivalent – im Widerspruch zu Satz 7.14 (b), da $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_1(S^{n-1}) = \{1\}$ nach Beispiel 8.17 (a) und Aufgabe 8.14 (c) gilt.

Aufgabe 8.19 (Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche). Für $(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$ und $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ setzen wir

$$(a_1, a_2) * (b_1, b_2) := (a_1 + (-1)^{a_2} b_1, a_2 + b_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Man prüft sofort nach, dass $(\mathbb{Z}^2, *)$ eine (nicht-abelsche) Gruppe ist. Sie heißt *semidirektes Produkt* von \mathbb{Z} mit \mathbb{Z} und wird mit $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ bezeichnet. Man zeige:

- $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ operiert durch $*$ auf \mathbb{R}^2 , und diese Operation ist frei diskontinuierlich.
- Der Quotientenraum $\mathbb{R}^2 / (\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ ist homöomorph zur Kleinschen Flasche.

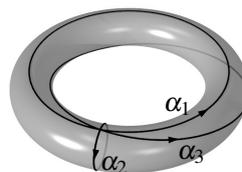
Nach Satz 8.16 ist die Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche damit also isomorph zu $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$.

Aufgabe 8.20. Im Torus $X = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ seien wie im Bild die drei geschlossenen Wege

$$\alpha_1 : I \rightarrow X, t \mapsto \overline{(t, 0)},$$

$$\alpha_2 : I \rightarrow X, t \mapsto \overline{(0, t)},$$

$$\alpha_3 : I \rightarrow X, t \mapsto \overline{(t, t)}$$



gegeben.

- Finde für $i = 1, 2, 3$ jeweils eine Überlagerung $p_i: \tilde{X}_i \rightarrow X$ vom Grad 2, so dass die Hochhebung von α_i wieder geschlossen ist, die Hochhebung der beiden anderen Wege aber nicht.
- Schreibe diese Überlagerungen explizit als Restklassenabbildung einer geeigneten frei diskontinuierlichen Gruppenoperation auf \tilde{X}_i .

12

Bemerkung 8.21. Ist der Raum \tilde{X} in der Situation von Satz 8.16 zwar wegzusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend, so ist der Morphismus $h: \pi_1(X, x_0) \rightarrow G$ des Fasertransports nach diesem Satz zwar noch surjektiv, aber in der Regel nicht mehr injektiv. Sein Kern $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ (da p_* nach Bemerkung 8.13 injektiv ist) isomorph zu $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, und wir erhalten aus dem Homomorphiesatz [G1, Satz 6.17] angewendet auf h den Isomorphismus

$$\pi_1(X, x_0) / p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong G.$$

Betrachten wir z. B. noch einmal die Situation aus Beispiel 8.6 (b), in der \mathbb{Z}_n auf $\tilde{X} = S^1$ durch Multiplikation mit n -ten Einheitswurzeln operiert, und der Quotient $X = \tilde{X}/G$ wiederum homöomorph zu S^1 ist: In diesem Fall sind $\pi_1(X, x_0)$ und $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ beide isomorph zu \mathbb{Z} , und p_* bildet den Erzeuger von $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, also die geschlossene Schleife in \tilde{X} mit Umlaufzahl 1, auf eine Schleife in X mit Umlaufzahl n ab. Die Untergruppe $p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ von $\pi_1(X, x_0) \cong \mathbb{Z}$ ist also $n\mathbb{Z}$, und wir erhalten korrekterweise

$$\pi_1(X, x_0) / p_*\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong \mathbb{Z} / n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n \cong G.$$

Bemerkung 8.22 (S^n ist nicht kontrahierbar). Wir haben in Beispiel 8.17 (a) gesehen, dass die Identität auf S^1 nicht homotop zu einer konstanten Abbildung ist, also dass S^1 damit nach Bemerkung 6.9 (a) nicht kontrahierbar ist.

In der Tat gilt diese Aussage für alle Sphären S^n mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ – und sie ist dort auch genauso anschaulich wie im Fall der Kreislinie S^1 . Allerdings lässt sich dieser allgemeine Fall mit unseren bisher entwickelten Methoden nicht beweisen, da die Fundamentalgruppe von S^n für $n > 1$ nach Aufgabe 8.14 (c) trivial ist. Man benötigt für einen Beweis dieser Aussage Methoden der algebraischen Topologie, die über den Rahmen dieser Vorlesung weit hinaus gehen.

Gar nicht mehr anschaulich ist hingegen, dass die entsprechende Aussage in unendlicher Dimension falsch ist:

Aufgabe 8.23. Es sei V der (unendlich-dimensionale) Vektorraum aller beschränkten reellen Zahlenfolgen. Wir betrachten ihn als normierten Raum mit der Supremumsnorm

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Man zeige, dass in diesem Raum die Einheitskugel

$$\{(x_n) \in V : \|(x_n)_n\| = 1\}$$

kontrahierbar ist.

(Hinweis: Die Abbildung $f: V \rightarrow V, (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_0, x_1, \dots)$ ist hierfür nützlich.)

Bemerkung 8.24 (Universelle Überlagerungen). Um Satz 8.16 zur Berechnung der Fundamentalgruppe eines gegebenen topologischen Raumes X verwenden zu können, benötigen wir einen einfach zusammenhängenden Raum \tilde{X} zusammen mit einer frei diskontinuierlichen Operation einer Gruppe G , so dass $\tilde{X}/G \cong X$. Es stellt sich also die Frage, ob wir solche \tilde{X} und G in jedem Fall finden können.

In der Tat funktioniert dies für „hinreichend schöne“ topologische Räume X immer. Die Idee hierfür ist, zu einem gegebenen punktierten topologischen Raum (X, x_0) die Menge

$$\tilde{X} := \{\alpha: (I, 0) \rightarrow (X, x_0)\} / \simeq \text{rel } \{0, 1\}$$

aller Homotopieklassen von (nicht notwendig geschlossenen) Wegen in X mit Anfangspunkt x_0 zu betrachten, zusammen mit der Abbildung $p: \tilde{X} \rightarrow X, [\alpha] \mapsto \alpha(1)$. Weiterhin operiert die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ offensichtlich auf \tilde{X} durch das Zusammensetzen von Wegen, also durch

$$\pi_1(X, x_0) \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}, ([\beta], [\alpha]) \mapsto [\beta] \bullet [\alpha].$$

Man kann \tilde{X} nun so zu einem einfach zusammenhängenden topologischen Raum machen, dass die Operation von $\pi_1(X, x_0)$ auf \tilde{X} frei diskontinuierlich, und der Quotientenraum $\tilde{X}/\pi_1(X, x_0)$ homöomorph zu X mit Quotientenabbildung p wird [J, Kapitel 9.7]. Die so entstehende Überlagerung $p: \tilde{X} \rightarrow X$ heißt *universelle Überlagerung* von X .

Die Überprüfung aller für diese Aussage notwendigen Dinge ist recht langwierig, aber nicht weiter schwierig. Wir wollen den kompletten Beweis hier nicht vorführen, da er zwar die prinzipielle Möglichkeit der Bestimmung von Fundamentalgruppen mit Hilfe von Überlagerungen zeigt, aber keine konkrete Berechnungsmöglichkeit dafür liefert – hierfür ist man darauf angewiesen, die dafür nötige Darstellung $\tilde{X}/G \cong X$ wie oben auf eine andere Art zu ermitteln.

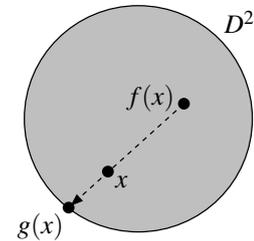
9. Anwendungen der Fundamentalgruppe

Nachdem wir mit Hilfe von Überlagerungen nun in der Lage sind, Fundamentalgruppen zu berechnen, wollen wir in diesem abschließenden Kapitel noch einige Konsequenzen hieraus untersuchen. Wir beginnen dazu mit dem folgenden Satz, der zwar sehr einfach zu formulieren, aber schon nicht mehr anschaulich offensichtlich ist.

Satz 9.1 (Brouwerscher Fixpunktsatz). *Jede stetige Abbildung $f: D^2 \rightarrow D^2$ der Einheitskreisscheibe in sich hat einen Fixpunkt, also einen Punkt $x \in D^2$ mit $f(x) = x$.*

Beweis. Angenommen, es gäbe eine stetige Abbildung $f: D^2 \rightarrow D^2$ ohne Fixpunkt.

Wir konstruieren daraus dann eine Abbildung $g: D^2 \rightarrow S^1$ wie folgt: Für $x \in D^2$ ist nach unserer Annahme ja $f(x) \neq x$. Also gibt es einen eindeutig bestimmten von $f(x)$ ausgehenden Strahl über x . Es sei nun $g(x)$ wie im Bild rechts dargestellt der (eindeutig bestimmte) Schnittpunkt dieses Strahls mit dem Kreisrand. Beachte, dass die Funktion g auf dem Kreisrand S^1 nach dieser Konstruktion genau die Identität ist – für diese Punkte trifft der Strahl den Kreisrand ja unabhängig von $f(x)$ immer im Punkt x .



Wie ihr schon aus der Schule wisst, kann man diesen Schnittpunkt von einer Geraden mit einer Kreislinie natürlich konkret mit einer quadratischen Gleichung berechnen. Da uns die konkrete dabei herauskommende Formel nicht interessiert, werden wir sie hier allerdings nicht angeben. Wir benötigen nur, dass die Lösungsformel für quadratische Gleichungen bekanntlich ein *stetiger* Ausdruck in den Koeffizienten des Polynoms und die oben konstruierte Funktion g damit stetig ist.

Also lässt sich die Identität auf S^1 zu einer stetigen Funktion $g: D^2 \rightarrow S^1$ fortsetzen. Nach Aufgabe 6.4 bedeutet dies aber gerade, dass die Identität auf S^1 dann auch homotop zu einer konstanten Abbildung sein muss – im Widerspruch zu Beispiel 8.17 (a). Damit war unsere Annahme der Existenz einer fixpunktfreien Abbildung auf D^2 falsch. \square

Bemerkung 9.2 (Brouwerscher Fixpunktsatz in höheren Dimensionen).

- (a) Der Brouwersche Fixpunktsatz gilt nicht nur für D^2 , sondern in der Tat auch für alle Einheitskugeln D^n – und zwar mit exakt demselben Beweis, den wir gegeben haben. Wir haben ihn nur deswegen nur für D^2 formuliert, da wir den entscheidenden Punkt im Beweis, nämlich dass die Identität auf S^{n-1} nicht homotop zu einer konstanten Abbildung ist, nur für den Fall $n = 2$ gezeigt haben (siehe Beispiel 8.17 (a) und Bemerkung 8.22).
- (b) Für Einheitskugeln in allgemeinen normierten Räumen ist die Aussage von Satz 9.1 jedoch falsch (siehe auch Aufgabe 8.23): Dazu können wir z. B. den Raum

$$l^2 = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$$

aller quadratsummierbaren Folgen mit der zugehörigen Norm

$$\| (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2}$$

betrachten. Bezeichnet $D \subset l^2$ die Einheitskugel in diesem Raum, so ist

$$f: D \rightarrow D, (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto \left(\sqrt{1 - \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2}, x_0, x_1, \dots \right)$$

eine stetige Abbildung ohne Fixpunkt: Für einen Fixpunkt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ müsste ja

$$\left(\sqrt{1 - \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2}, x_0, x_1, \dots \right) = (x_0, x_1, x_2, \dots) \quad (*)$$

gelten, also zunächst einmal $x_0 = x_1 = x_2 = \dots$ – d. h. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ müsste eine konstante Folge sein. Aber die Nullfolge ist die einzige konstante Folge in l^2 , und diese erfüllt in (*) natürlich nicht die erste Gleichung $\sqrt{1 - \sum_{n=0}^{\infty} x_n^2} = x_0$.

Als weitere Anwendung von Fundamentalgruppen können wir nun auch einen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra angeben, also die Existenz von Nullstellen komplexer Polynome zeigen. Vielleicht habt ihr in anderen Vorlesungen, z. B. in der Einführung in die Funktionentheorie oder der Einführung in die Algebra, bereits einen solchen Beweis gesehen – der hier vorgestellte rein topologische Beweis hat jedoch den Vorteil, dass er deutlich allgemeiner ist, da er nicht nur auf Polynome anwendbar ist, sondern allgemein auf Funktionen, die sich als Summe von $z \mapsto z^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und einer im Vergleich zu z^n kleinen stetigen „Störfunktion“ schreiben lassen.

Die topologische Beweisidee ist dabei schnell erklärt: Bilden wir eine Kreislinie um 0 in \mathbb{C} mit der Funktion $z \mapsto z^n$ ab, so laufen wir dabei offensichtlich n -mal um den Nullpunkt herum. Dies ändert sich auch nicht, wenn wir diese Funktion etwas stören, also z. B. zu einem Polynom vom Grad n abändern. Ziehen wir die ursprüngliche Kreislinie nun zu einem Punkt zusammen, so passiert dies dann auch mit der abgebildeten Kreislinie, so dass diese dabei notwendigerweise an einer Stelle einmal über den Nullpunkt gezogen werden muss – dort befindet sich dann eine Nullstelle.

Satz 9.3.

- (a) *Es sei $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $R \in \mathbb{R}_{>0}$ mit*

$$|g(z)| < R^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| = R.$$

Dann hat die Funktion

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^n + g(z)$$

eine Nullstelle in der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$.

- (b) (**Fundamentalsatz der Algebra**) *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom hat eine Nullstelle in \mathbb{C} .*

Beweis.

- (a) Angenommen, die Funktion f hätte keine Nullstelle vom Betrag höchstens R . Dann könnten wir die stetige Funktion

$$F: D^2 \rightarrow S^1, \quad z \mapsto \frac{f(Rz)}{|f(Rz)|} = \frac{(Rz)^n + g(Rz)}{|(Rz)^n + g(Rz)|}$$

betrachten, da der Nenner nie 0 werden kann. Es gilt:

- Die Funktion $F|_{S^1}$ ist nach Aufgabe 6.4 homotop zu einer konstanten Abbildung, da sie sich zu einer stetigen Funktion $F: D^2 \rightarrow S^1$ fortsetzen lässt.
- Die Funktion $F|_{S^1}$ ist ebenfalls homotop zur Abbildung $z \mapsto z^n$ – und zwar mit der Homotopie

$$H: S^1 \times I \rightarrow S^1, \quad (z, t) \mapsto \frac{(Rz)^n + t g(Rz)}{|(Rz)^n + t g(Rz)|},$$

denn nach Voraussetzung ist

$$|(Rz)^n + t g(Rz)| > |(Rz)^n| - |t g(Rz)| = R^n - t |g(Rz)| \stackrel{t \leq 1}{\geq} R^n - |g(Rz)| > 0$$

für alle $z \in S^1$, und der Nenner des angegebenen Bruches damit immer ungleich 0.

Da die Homotopie eine Äquivalenzrelation ist, wäre dann also auch die Abbildung $z \mapsto z^n$ homotop auf S^1 zu einer konstanten Abbildung. Genau wie in Beispiel 8.17 (a) ist dies aber ein Widerspruch zu $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, da diese beiden Schleifen die Umlaufzahl n bzw. 0 haben. Also war unsere Annahme falsch, und f muss doch eine Nullstelle besitzen.

- (b) Wir können $f = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ mit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ ohne Einschränkung als normiert annehmen und passend zu (a) die Funktion $g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ betrachten. Da bekanntlich

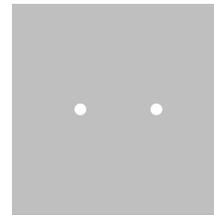
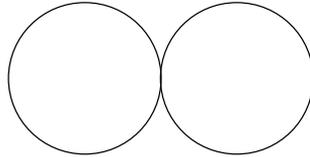
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{|a_{n-1}|R^{n-1} + \dots + |a_1|R + |a_0|}{R^n} = 0$$

gilt, gibt es ein $R \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass dieser Quotient kleiner als 1 ist. Für ein solches R ist dann

$$|g(z)| \leq |a_{n-1}|R^{n-1} + \dots + |a_1|R + |a_0| < R^n \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| = R,$$

und damit folgt die Existenz einer Nullstelle von f aus Teil (a). □

Für weitere Anwendungen benötigen wir noch eine andere oft nützliche Methode, um Fundamentalgruppen zu berechnen. Sie bietet sich vor allem dann an, wenn der betrachtete Raum als Vereinigung anderer Räume geschrieben werden kann, deren Fundamentalgruppen bereits bekannt sind. Das einfachste Beispiel hierfür ist wohl wie im Bild unten die Vereinigung zweier Kreislinien in einem Punkt, oder (dazu homotopieäquivalent) das Komplement von zwei Punkten in der Ebene. Von diesem Raum können wir die Fundamentalgruppe bisher noch nicht bestimmen.



Intuitiv würde man vielleicht erwarten, dass die Homotopieklasse von Schleifen in diesen Räumen nun einfach durch zwei Umlaufzahlen gegeben ist – was bedeuten würde, dass die Fundamentalgruppe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ wäre. Dies ist jedoch nicht korrekt, denn wie wir in Beispiel 9.9 noch sehen werden, ist diese Fundamentalgruppe nicht abelsch. In der Tat kann man sie sich als eine „nicht-abelsche Variante“ des Produkts $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vorstellen. Um diese und ähnliche Gruppen exakt beschreiben zu können, benötigen wir zunächst zwei algebraische Vorbereitungen.

Konstruktion 9.4 (Freies Produkt von Gruppen). Es seien (G, \bullet) und (H, \bullet) zwei Gruppen. Wir betrachten dann die Menge M aller endlichen Folgen mit Folgengliedern in der disjunkten Vereinigung $G \sqcup H$. Dabei wollen wir derartige Folgen einfach durch Hintereinanderschreiben der Folgenglieder notieren. Die Elemente von M haben also die Form $a_1 a_2 \dots a_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, wobei jedes a_i für $i = 1, \dots, n$ in G oder in H liegt (und wir G und H dabei als disjunkt annehmen, so dass jedes Folgenglied also eindeutig entweder in G oder in H liegt). Für den restlichen Teil der folgenden Konstruktion vereinbaren wir, dass g_i immer für ein Element aus G steht, h_i für ein Element aus H , und a_i für ein Element aus $G \sqcup H$, von dem nicht spezifiziert ist, ob es in G oder H liegt.

Aus naheliegenden Gründen bezeichnet man die Elemente von M auch als *Wörter* mit *Buchstaben* in $G \sqcup H$. Wir betrachten nun auf M die gemäß Konstruktion 5.1 von den folgenden Relationen erzeugte Äquivalenzrelation \sim :

- (a) Es ist

$$a_1 \dots a_n g_1 g_2 a_{n+1} \dots a_m \sim a_1 \dots a_n (g_1 \bullet g_2) a_{n+1} \dots a_m$$

und $a_1 \dots a_n h_1 h_2 a_{n+1} \dots a_m \sim a_1 \dots a_n (h_1 \bullet h_2) a_{n+1} \dots a_m$

für alle $0 \leq n \leq m$, d. h. sind in dem betrachteten Wort zwei aufeinander folgende Buchstaben in der gleichen Gruppe, also beide in G oder beide in H , so können wir diese beiden Buchstaben durch den einen Buchstaben ersetzen, der genau die Verknüpfung dieser beiden Elemente in G bzw. H ist.

- (b) Es ist

$$a_1 \dots a_n e_G a_{n+1} \dots a_m \sim a_1 \dots a_n a_{n+1} \dots a_m$$

und $a_1 \dots a_n e_H a_{n+1} \dots a_m \sim a_1 \dots a_n a_{n+1} \dots a_m$

für alle $0 \leq n \leq m$, d. h. die neutralen Elemente e_G und e_H der beiden Gruppen können aus dem betrachteten Wort stets herausgestrichen werden.

Nach Konstruktion 5.1 der erzeugten Äquivalenzrelation bedeutet dies also gerade, dass zwei Wörter in M bezüglich \sim äquivalent zueinander sind, wenn sie durch eine endliche Folge von Operationen der beiden Typen (a) und (b) und ihrer Inversen auseinander hervorgehen.

Es sei nun $G * H := M / \sim$ die Menge der Äquivalenzklassen dieser Relation. Um die Notationen nicht zu kompliziert werden zu lassen, vereinbaren wir, dass wir diese Äquivalenzklassen nicht mit einem Querstrich oder einer anderen speziellen Notation kennzeichnen, sondern sie einfach nur wie oben als Wörter schreiben, und dass alle solchen Wörter, die wir in Zukunft hinschreiben, für ihre Äquivalenzklassen unter \sim in $G * H$ stehen sollen. So können wir also z. B.

$$g_1 g_1 h_1 g_2^{-1} g_2 = g_1^2 h_1 e_G = g_1^2 h_1 \in G * H$$

schreiben, wobei dies Wörter mit 5, 3 bzw. 2 Buchstaben sind und g_1^2 für das Element $g_1 \bullet g_1 \in G$ steht.

Nach dieser langen Konstruktion der Menge $G * H$ ist es nun aber sehr einfach einzusehen, dass $G * H$ mit dem einfachen Hintereinanderschreiben von Wörtern eine Gruppe ist. In der Tat sind alle Gruppenaxiome offensichtlich; das neutrale Element ist das leere Wort, und das zu einem Wort $a_1 \cdots a_n$ inverse Element ist $a_n^{-1} \cdots a_1^{-1}$, wobei das Inverse a_i^{-1} für $i = 1, \dots, n$ hierbei natürlich jeweils in G oder H zu nehmen ist, je nachdem ob a_i in G oder H liegt. Man bezeichnet $G * H$ als das **freie Produkt** der Gruppen G und H .

Beispiel 9.5. Das freie Produkt $G * H$ liefert schon für einfachste Fälle von G und H unendliche nicht-abelsche Gruppen, die von der Struktur her recht kompliziert sind und sicher nicht zu irgend-etwas isomorph sind, was ihr in den Vorlesungen „Algebraische Strukturen“ oder „Einführung in die Algebra“ schon einmal gesehen habt. Wir wollen uns daher hier damit begnügen, in zwei Fällen die Gruppenelemente etwas konkreter hinzuschreiben und ein paar einfache Rechnungen durchzuführen.

- (a) $G = \mathbb{Z}$ und $H = \mathbb{Z}$ (dies wird der für uns relevante Fall für die Fundamentalgruppen werden): Da wir im freien Produkt ja Elemente von G strikt von Elementen von H unterscheiden müssen, sollten wir diese Elemente hier nicht einfach für beide Gruppen als ganze Zahlen schreiben. Stattdessen seien g und h Erzeuger (mit unendlicher Ordnung) von G bzw. H , so dass also

$$G = \{g^n : n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad H = \{h^n : n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}.$$

Die Elemente von $G * H$ sind dann nach Konstruktion „nicht-kommutative Monome“ in g , h , g^{-1} und h^{-1} . So ist z. B. $g^2 h^{-3} g^{-1}$ ein Element von $G * H$, das von gh^{-3} verschieden ist. Die Verknüpfung erfolgt einfach durch „Multiplikation“ dieser Monome mit anschließendem Vereinfachen, wie z. B.

$$(g^2 h^{-3} g^{-1})(ghgh) = g^2 h^{-3} g^{-1} ghgh = g^2 h^{-3} hgh = g^2 h^{-2} gh,$$

wobei dieser letzte Ausdruck nicht weiter vereinfacht werden kann.

- (b) $G = \mathbb{Z}_2$ und $H = \mathbb{Z}_2$: Sind g und h wie in (a) Erzeuger von G und H , die hier aber jeweils Ordnung 2 haben, so dass also

$$G = \{e, g\} \cong \mathbb{Z}_2 \quad \text{und} \quad H = \{e, h\} \cong \mathbb{Z}_2$$

ist, so sind die Elemente von $G * H$ genau das leere Wort sowie

$$g, gh, ghg, ghgh, \dots \quad \text{und} \quad h, hg, hgh, hghg, \dots$$

Jedes Wort *ungerader Länge* hat dabei Ordnung 2 (es ist z. B. $(ghg)(ghg) = ghgghg = e$), während die nicht-leeren Wörter *gerader Länge* Ordnung ∞ haben. Schon in diesem Beispiel, bei dem G und H die kleinsten nicht-trivialen Gruppen sind, kommt für $G * H$ also eine komplizierte nicht-abelsche Gruppe heraus.

13

Die zweite algebraische Vorbereitung, die wir benötigen werden, ist die Konstruktion von erzeugten Normalteilern.

Konstruktion 9.6 (Erzeugte Normalteiler). Es sei M eine Teilmenge einer Gruppe G . Wir wissen aus den „Algebraischen Strukturen“, dass es dann die von M erzeugte Untergruppe

$$\langle M \rangle := \bigcap_{\substack{U \leq G \\ \text{mit } M \subset U}} U$$

gibt, die man sich vorstellen kann als die kleinste Untergruppe von G , die M enthält [G1, Definition 3.11 und Lemma 3.12].

Dass diese Konstruktion funktioniert und auch wirklich eine Untergruppe liefert, liegt dabei daran, dass ein solcher Schnitt von beliebig vielen Untergruppen von G stets wieder eine Untergruppe von G ist. Dementsprechend funktioniert eine analoge Konstruktion des Erzeugnisses einer Menge für eine bestimmte mathematische Struktur (wie hier für Untergruppen) immer dann, wenn diese Struktur abgeschlossen unter beliebiger Durchschnittsbildung ist. Ihr kennt z. B. aus der linearen Algebra den völlig analogen Begriff des von einer Menge von Vektoren erzeugten Untervektorraums, der ja ebenfalls der kleinste Untervektorraum ist, der die gegebenen Vektoren enthält.

Im Folgenden benötigen wir noch einen anderen Fall einer solchen Konstruktion: Auch der Schnitt von Normalteilern in einer Gruppe ist wieder ein Normalteiler, und daher können wir zu einer beliebigen Teilmenge M einer Gruppe G den von M **erzeugten Normalteiler**

$$\langle\langle M \rangle\rangle := \bigcap_{\substack{U \trianglelefteq G \\ \text{mit } M \subset U}} U$$

betrachten, den man sich wiederum als den kleinsten Normalteiler von G vorstellen kann, der M enthält.

Beispiel 9.7.

- (a) In einer abelschen Gruppe G ist natürlich $\langle\langle M \rangle\rangle = \langle M \rangle$ für alle $M \subset G$, da Normalteiler und Untergruppen dann übereinstimmen.
- (b) In der symmetrischen Gruppe $G = S_3$ ist die von der Transposition $(1\ 2)$ erzeugte Untergruppe $\langle (1\ 2) \rangle = \{\text{id}, (1\ 2)\}$. Nun sind die Normalteiler von S_3 aber bekanntlich nur die alternierende Gruppe A_3 und die trivialen Normalteiler S_3 und $\{\text{id}\}$ – und da $(1\ 2) \notin A_3$ gilt, ist der kleinste Normalteiler, der diese Transposition enthält, also $\langle\langle (1\ 2) \rangle\rangle = S_3$. In diesem Fall stimmen die Begriffe der erzeugten Untergruppe und des erzeugten Normalteilers also nicht überein.

Mit diesen beiden Vorbereitungen können wir nun den angekündigten Satz formulieren.

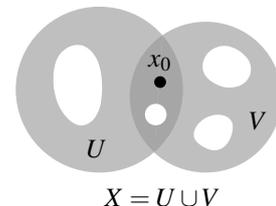
Satz 9.8 (Satz von Seifert und van Kampen). *Es seien U und V zwei offene Teilmengen eines topologischen Raumes, so dass $X = U \cup V$ gilt und $U \cap V$ wegzusammenhängend ist. Ferner sei $x_0 \in U \cap V$. Dann gilt*

$$\pi_1(X, x_0) \cong (\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)) / N,$$

wobei

$$N := \langle\langle i_*[\alpha]j_*[\alpha]^{-1} : [\alpha] \in \pi_1(U \cap V, x_0) \rangle\rangle$$

und $i: U \cap V \rightarrow U$ und $j: U \cap V \rightarrow V$ die beiden Inklusionsabbildungen von $U \cap V$ in U bzw. V sind.



Beweisidee. Da der formale Beweis dieses Satzes recht technisch ist, wollen wir hier nur die Idee dafür angeben, warum die Fundamentalgruppe von X die im Satz behauptete Form hat.

Dass $\pi_1(X, x_0)$ durch das freie Produkt $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ (bzw. einen Quotienten davon) beschrieben werden kann, bedeutet zunächst einmal,

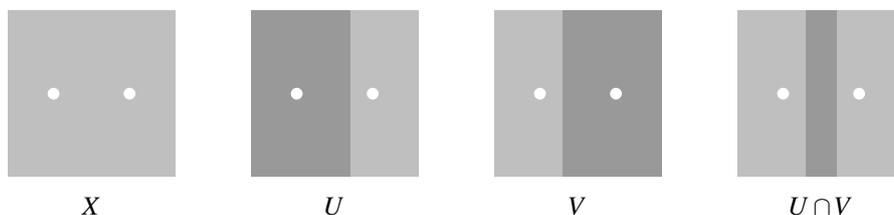
- dass jede Schleife in X als Zusammensetzung von Schleifen in U und Schleifen in V geschrieben werden kann und somit ein Wort in $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ bildet (dies haben wir bereits in Aufgabe 8.14 (a) gesehen); und
- dass diese Zusammensetzung von Schleifen nicht abelsch ist.

Der Normalteiler N ist offensichtlich nur dann nicht-trivial, wenn $U \cap V$ nicht einfach zusammenhängend ist, also eine nicht-triviale Schleife α besitzt. In diesem Fall können wir α natürlich als Schleife sowohl in U als auch in V auffassen, d. h. es gibt die beiden Elemente $i_*[\alpha] \in \pi_1(U, x_0)$ und $j_*[\alpha] \in \pi_1(V, x_0)$. Diese beiden Elemente beschreiben geometrisch *dieselbe* Schleife in X , sind im freien Produkt $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ aber *verschieden*, da wir dort ja strikt zwischen Elementen der ersten und der zweiten Gruppe unterscheiden müssen. Um das zu kompensieren, müssen wir also zu einer geeigneten Faktorgruppe von $\pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ übergehen, in der wir $i_*[\alpha]$ und $j_*[\alpha]$ für jede Schleife α in $U \cap V$ miteinander identifizieren. Dies tut genau das Herausteilen von N : Für alle α wie oben ist ja das zweibuchstabile Wort $i_*[\alpha] j_*[\alpha]^{-1}$ in N , d. h. $i_*[\alpha] j_*[\alpha]^{-1}$ gleich dem leeren Wort und damit $i_*[\alpha] = j_*[\alpha]$ modulo N .

Einen vollständigen Beweis des Satzes von Seifert und van Kampen könnt ihr z. B. in [H, Kapitel 1.2] finden. \square

Beispiel 9.9. Der einfachste Fall von Satz 9.8 ist natürlich der, in dem $U \cap V$ einfach zusammenhängend und damit $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0)$ ist.

- (a) Für die doppelt gelochte Ebene $X = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ können wir U und V wie im folgenden Bild wählen, wo U , V und $U \cap V$ in den rechten drei Bildern dunkel eingezeichnet sind.



Dann sind U und V homotopieäquivalent zur einfach gelochten Ebene $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und haben damit nach Beispiel 7.15 Fundamentalgruppe \mathbb{Z} . Da $U \cap V$ einfach zusammenhängend ist, gilt nach Satz 9.8 für die (nach Satz 7.8 vom Basispunkt unabhängige) Fundamentalgruppe von X

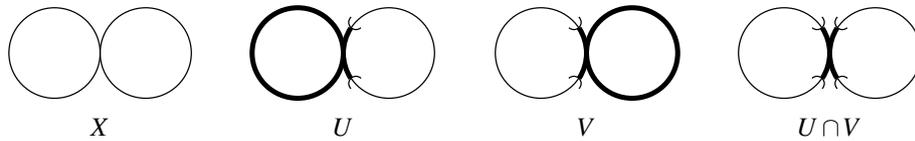
$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Insbesondere ist $\pi_1(X)$ also nicht abelsch. Dies kann man auch anschaulich gut an der folgenden Knobelaufgabe sehen: In der Abbildung unten links ist ein Bild mit einem über zwei Nägel gespannten Faden an der Wand aufgehängt (so dass der Faden also in der doppelt gelochten Ebene X liegt). Zieht man dann einen dieser Nägel aus der Wand heraus, bleibt das Bild natürlich (schief) hängen. Man soll das Bild nun mit dem Faden stattdessen so an den zwei Nägeln aufhängen, dass es herunterfällt, wenn man einen beliebigen der beiden Nägel herauszieht.



Dies ist wie im Bild rechts möglich, indem der Faden (in Pfeilrichtung) erst gegen den Uhrzeigersinn um den rechten und dann um den linken Nagel gelegt wird, und dann im Uhrzeigersinn um den rechten und dann wieder um den linken Nagel. Sind $[\alpha]$ und $[\beta]$ die Schleifen um die beiden Löcher von X , so hat der Faden also die nicht-triviale Homotopieklasse $[\alpha] \bullet [\beta] \bullet [\alpha]^{-1} \bullet [\beta]^{-1}$ in X , und das Bild bleibt hängen. Zieht man aber einen der Nägel heraus, so bleibt die einfach gelochte Ebene mit Fundamentalgruppe \mathbb{Z} übrig, und das Bild fällt herunter, da die Umlaufzahl des Fadens um beide Nägel 0 ist.

- (b) Ist X der Raum, der durch Zusammenkleben von zwei Kreislinien in einem Punkt entsteht, so ist dieser homotopieäquivalent zu $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ und muss damit nach Satz 7.14 ebenfalls die Fundamentalgruppe $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ haben. Wollen wir dies direkt mit dem Satz von Seifert und van Kampen zeigen, so können wir für U und V jedoch nicht die beiden Kreislinien nehmen, da dies keine offenen Mengen in X sind. Stattdessen müssen wir bei beiden Kreislinien wie im Bild unten noch eine kleine offene Umgebung des Klebepunktes mit hinzunehmen.



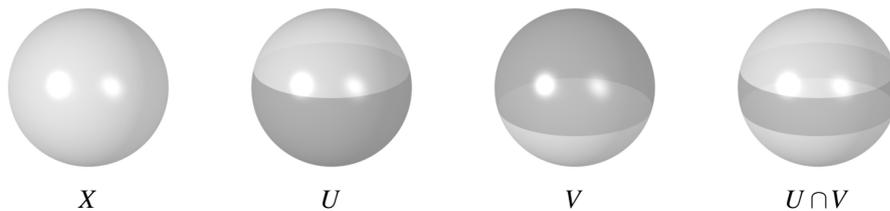
Dies ändert jedoch die Homotopieklassen von U und V nicht – S^1 ist ein Deformationsretrakt von U und V , und $U \cap V$ ist als kontrahierbarer Raum nach Beispiel 7.15 (a) einfach zusammenhängend. Wir erhalten also wieder

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \pi_1(S^1) * \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Beispiel 9.10 (Die Fundamentalgruppen der Sphären). In Aufgabe 8.14 (c) haben wir bereits gesehen, dass die Fundamentalgruppen der Sphären S^n für $n \geq 2$ trivial sind. Dies ist in der Tat ein Spezialfall des Satzes von Seifert und van Kampen: Zerlegt man (wie im Bild unten für den Fall $n = 2$ dargestellt) die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ in die Teile

$$U = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_{n+1} < \frac{1}{2}\} \quad \text{und} \quad V = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) : x_{n+1} > -\frac{1}{2}\},$$

so sind U und V kontrahierbar, und damit ist $\pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \{1\} * \{1\} = \{1\}$. Auch wenn $U \cap V$ nicht notwendig einfach zusammenhängend ist (im Bild unten für $n = 2$ ist ja $\pi_1(U \cap V) \cong \mathbb{Z}$, da die Kreislinie des Äquators ein Deformationsretrakt von $U \cap V$ ist), ist der Normalteiler N in Satz 9.8 damit natürlich notwendigerweise trivial, und wir erhalten auch $\pi_1(X) \cong \{1\}$.



Natürlich ist es auch anschaulich einleuchtend, dass sich jede Schleife in S^n für $n \geq 2$ zu einem Punkt zusammenziehen lässt: Da $S^n \setminus \{P\}$ für jeden Punkt $P \in S^n$ kontrahierbar ist, kann man ja jede Schleife in S^n , die einen Punkt P nicht trifft, in $S^n \setminus \{P\}$ und damit auch in S^n zusammenziehen. Der einzige Grund, warum dieses einfache Argument kein exakter Beweis ist, ist die Existenz von geschlossenen Peano-Kurven analog zu Satz 2.18, die den gesamten Raum S^n ausfüllen und das obige Argument daher für keinen Punkt P zulassen.

Aufgabe 9.11. Es sei $A \subset \mathbb{R}^2$ eine endliche Menge mit $n := |A|$. Zeige, dass

$$\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus A) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n\text{-mal}}.$$

Aufgabe 9.12. Zu einer Gruppe G sei $G' := \langle aba^{-1}b^{-1} : a, b \in G \rangle \leq G$ die sogenannte *Kommutatoruntergruppe* von G . Man beweise:

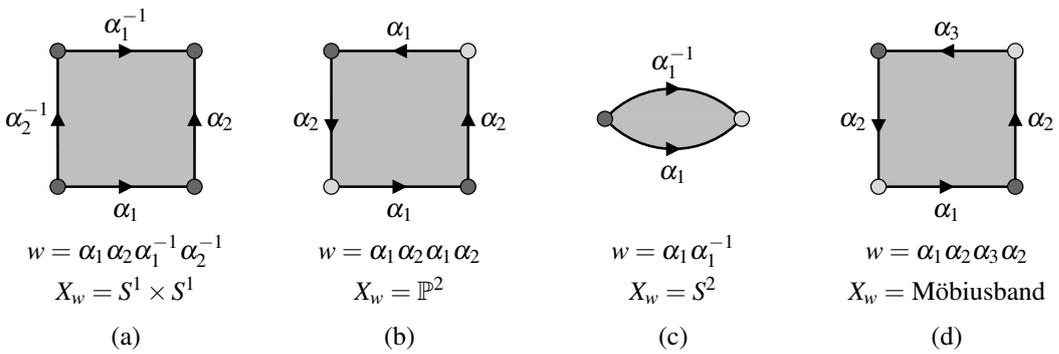
- (a) G' ist ein Normalteiler von G .
- (b) Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und bezeichnet $G = \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ das n -fache freie Produkt von \mathbb{Z} mit sich selbst, so ist $G/G' \cong \mathbb{Z}^n$.
- (c) Sind $A, B \subset \mathbb{R}^2$ endlich mit $|A| \neq |B|$, so sind die Räume $\mathbb{R}^2 \setminus A$ und $\mathbb{R}^2 \setminus B$ nicht homöomorph zueinander.

Mit dem Satz 9.8 von Seifert und van Kampen können wir nun von vielen topologischen Räumen die Fundamentalgruppe bestimmen, u. a. von allen kompakten 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten wie in Aufgabe 5.27. Wir benötigen dazu die folgende Konstruktion.

Konstruktion 9.13.

- (a) Wir bezeichnen das n -fache freie Produkt von \mathbb{Z} mit sich selbst als \mathbb{Z}^{*n} . Dabei schreiben wir für $i = 1, \dots, n$ einen Erzeuger des i -ten Faktors als α_i , so dass wir Wörter in den Buchstaben $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}$ als Elemente von \mathbb{Z}^{*n} auffassen können. Wir werden dabei im Folgenden immer annehmen, dass in einem solchen Wort jeder Buchstabe α_i oder α_i^{-1} mindestens einmal vorkommt (ansonsten reduzieren wir n entsprechend).
- (b) Zu einem Wort w der Länge $m \in \mathbb{N}_{>1}$ in $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}$ sei P_m ein m -Eck. Wir beschriften die Kanten von P_m der Reihe nach mit den Buchstaben von w . Den topologischen Raum, den wir erhalten, indem wir die Kanten von P_m entsprechend dieser Beschriftung miteinander identifizieren, bezeichnen wir mit X_w (siehe Beispiel 9.14).
- (c) Wir nennen zwei Ecken x und y von P_m äquivalent bezüglich w und schreiben dies als $x \sim y$, wenn sie in X_w miteinander identifiziert werden.

Beispiel 9.14. Das folgende Bild zeigt einige Wörter w und die zugehörigen Räume X_w wie in Konstruktion 9.13 (b). Wir haben die Kanten entgegen dem Uhrzeigersinn mit den Buchstaben von w beschriftet und dabei bei der unteren Kante begonnen. Dementsprechend stehen α_i und α_i^{-1} für Kanten, die beim Verkleben entgegen bzw. im Uhrzeigersinn orientiert sind; dies ist auch durch die Pfeile angedeutet. Ecken, die im Sinne von Konstruktion 9.13 (c) äquivalent sind, sind mit der gleichen Farbe gekennzeichnet. Das Möbiusband, der Torus und die reelle projektive Ebene ergeben sich genauso wie in Beispiel 5.9 (b) und (c).



Beachte, dass X_w genau dann eine Mannigfaltigkeit ist, wenn in w jedes α_i genau zweimal (als α_i oder α_i^{-1}) vorkommt, also wenn immer genau zwei Kanten miteinander verklebt werden (so wie in den Fällen (a), (b) und (c) oben), da X_w nur dann an einem Punkt einer solchen Kante lokal homöomorph zu \mathbb{R}^2 ist. Umgekehrt kann man zeigen, dass jede zusammenhängende, kompakte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit von der Form X_w für ein geeignetes w ist.

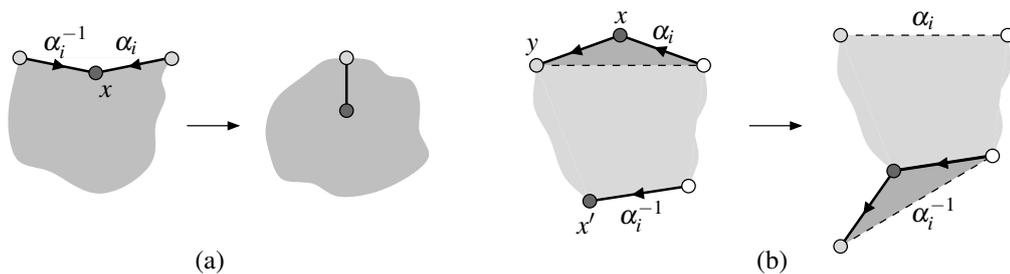
Wir wollen nun als Erstes zeigen, dass wir ein gegebenes Wort in diesem Fall immer so abändern können, dass alle Ecken von P_m im Sinne von Konstruktion 9.13 (c) zueinander äquivalent werden – diese Eigenschaft werden wir für die Berechnung der Fundamentalgruppe in Satz 9.17 benötigen.

Lemma 9.15. *Es sei w ein Wort in $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}$, in dem jedes α_i genau zweimal (als α_i oder α_i^{-1}) vorkommt. Ferner nehmen wir an, dass $X_w \not\cong S^2$.*

Dann gibt es ein Wort w' mit $X_{w'} \cong X_w$, so dass alle Ecken des zugehörigen Vielecks bezüglich w' zueinander äquivalent sind.

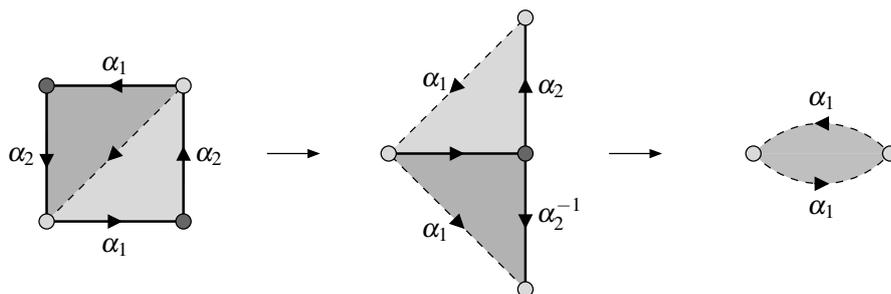
Beweis. Der Beweis ist konstruktiv und benutzt die folgenden beiden Modifikationen des Vielecks:

- (a) Gibt es in P_m eine Ecke x , die nur zu sich selbst äquivalent ist, so muss dort eine Kante α_i direkt an die zugehörige inverse Kante α_i^{-1} stoßen. Sind dies die einzigen beiden Kanten in X_w , so ist $X_w \cong S^2$ nach Beispiel 9.14 (c), was wir ausgeschlossen haben. Ansonsten können wir diese beiden Kanten wie im Bild unten links miteinander verkleben und erhalten ein neues Vieleck mit zwei Seiten weniger, das x nicht mehr als Ecke besitzt. Im Wort w entspricht dies einfach dem Weglassen der beiden Buchstaben α_i und α_i^{-1} .
- (b) Gibt es in P_m zwei verschiedene zueinander äquivalente Ecken x und x' sowie eine weitere dazu nicht äquivalente Ecke y , so können wir zunächst annehmen, dass x und y benachbart sind. Wir betrachten im Folgenden wie im Bild unten rechts den Fall, dass die an x , aber nicht an y grenzende Kante α_i ist und in w noch an anderer Stelle der Buchstabe α_i^{-1} auftritt (der Fall einer doppelt auftretenden Kante α_i ist analog). Schneiden wir das Vieleck dann entlang der gestrichelt eingezeichneten Linie vom Startpunkt von α_i nach y auf, so können wir α_i mit α_i^{-1} verkleben und erhalten ein neues Vieleck, das den gleichen topologischen Raum beschreibt und in dem die gestrichelte Linie zu zwei Außenkanten geworden ist (die wir nun mit α_i und α_i^{-1} bezeichnen können). Gleichzeitig wurde die Äquivalenzklasse von x um ein Element verringert (da x und x' nun derselbe Punkt sind) und die von y dafür um ein Element erweitert.



Solange noch verschiedene Äquivalenzklassen von Eckpunkten vorhanden sind, können wir also wiederholt Schritt (b) ausführen, um eine dieser Klassen immer weiter zu verkleinern und letztlich einelementig zu machen, und diese Klasse dann mit Schritt (a) eliminieren. \square

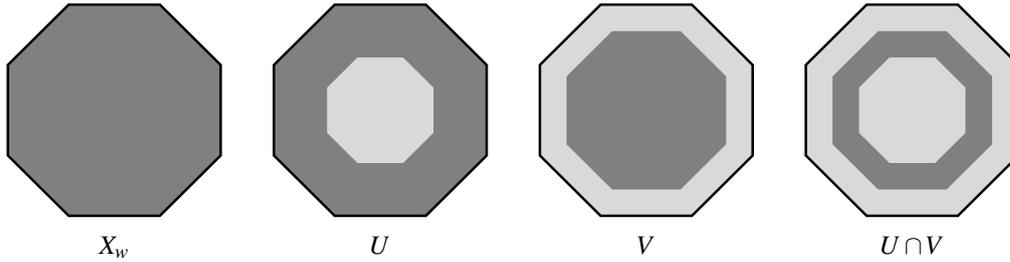
Beispiel 9.16. Beginnen wir mit dem Wort $w = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_2$ mit $X_w = \mathbb{P}^2$ wie in Beispiel 9.14 (b), so können wir dort die dunkel markierte Äquivalenzklasse von Eckpunkten eliminieren, indem wir wie im folgenden Bild das Quadrat diagonal aufschneiden, entlang der horizontalen Kanten α_1 zusammenkleben (beachte, dass das dunkle Dreieck dabei an der vertikalen Kante gespiegelt wurde, um die Kanten mit der korrekten Orientierung zu identifizieren), und anschließend die Kanten α_2 und α_2^{-1} verkleben. Es entsteht so das neue Wort $w' = \alpha_1 \alpha_1$, für das $X_{w'} \cong X_w = \mathbb{P}^2$ gilt, und für das nur noch eine Äquivalenzklasse von Eckpunkten existiert.



Satz 9.17 (Fundamentalgruppe von Flächen). *Es sei w ein Wort in $\alpha_1, \alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n, \alpha_n^{-1}$, so dass alle Ecken des zugehörigen Vielecks bezüglich w zueinander äquivalent sind. Dann gilt*

$$\pi_1(X_w) \cong \mathbb{Z}^{*n} / \langle\langle w \rangle\rangle.$$

Beweis. Wir benutzen den Satz 9.8 von Seifert und van Kampen für die im Bild unten dargestellte Zerlegung $X_w = U \cup V$: Für U wählen wir eine Menge, die in P_m einer ringförmigen Umgebung des Randes entspricht; und für V nehmen wir eine zu einer Kreisscheibe homöomorphe Teilmenge im Inneren des Vielecks, so dass $U \cap V$ homöomorph zu einem Kreisring ist.



Die Menge U ist dann homotopieäquivalent zum Bild des Randes von P_m in X_w . Dieser besteht aus dem (nach Voraussetzung einzigen) Eckpunkt des Vielecks zusammen mit den angehefteten Schleifen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, und hat damit wie in Beispiel 9.9 (b) die Fundamentalgruppe $\pi_1(U) \cong \mathbb{Z}^{*n}$. Da V kontrahierbar ist, gilt $\pi_1(V) = \{1\}$.

Als Raum, der zu einer Kreislinie S^1 homotopieäquivalent ist, gilt $\pi_1(U \cap V) \cong \mathbb{Z}$. In U ist der Erzeuger dieser Fundamentalgruppe homotop zu einem geschlossenen Weg, der einmal entlang des Randes von P_m entlang läuft, und hat dort damit die Klasse w . Aus Satz 9.8 folgt damit wie behauptet

$$\pi_1(X_w) \cong (\pi_1(U) * \pi_1(V)) / \langle\langle w \rangle\rangle \cong \mathbb{Z}^{*n} / \langle\langle w \rangle\rangle. \quad \square$$

Beispiel 9.18.

- (a) Für $w = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1}$ ist X_w nach Beispiel 9.14 (a) ein Torus. Mit Satz 9.17 erhalten wir

$$\pi_1(X_w) \cong \mathbb{Z}^{*2} / \langle\langle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1} \rangle\rangle$$

und damit $\pi_1(X_w) \cong \mathbb{Z}^2$ in Übereinstimmung mit Beispiel 8.17 (b), da das Heraustreten von $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_1^{-1} \alpha_2^{-1}$ genau dazu führt, dass im Quotienten $\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_2 \alpha_1$ gilt und wir somit eine freie abelsche Gruppe mit zwei Erzeugern erhalten.

- (b) Für $w = \alpha_1 \alpha_1$ ist $X_w = \mathbb{P}^2$ nach Beispiel 9.16. Satz 9.17 ergibt

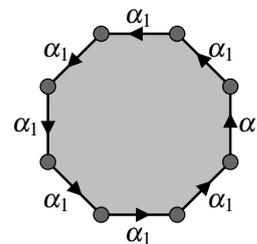
$$\pi_1(X_w) \cong \mathbb{Z} / \langle\langle \alpha_1^2 \rangle\rangle \cong \mathbb{Z} / \langle \alpha_1^2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

wie in Beispiel 8.17 (c).

- (c) Setzen wir $w = \alpha_1^n$ (mit dem im Bild rechts eingezeichneten Raum X_w), so ist X_w für $n > 2$ nach Beispiel 9.14 keine Mannigfaltigkeit. Dennoch bilden aber auch hier alle Ecken eine einzige Äquivalenzklasse (da sie alle der gemeinsame Start- und Endpunkt der Kante α_1 sind), und damit besagt Satz 9.17, dass in diesem Fall analog zu (b)

$$\pi_1(X_w) \cong \mathbb{Z} / \langle\langle \alpha_1^n \rangle\rangle \cong \mathbb{Z}_n$$

gilt.



Zum Abschluss wollen wir als Anwendung unserer Ergebnisse noch kurz skizzieren, wie Fundamentalgruppen in der sogenannten Knotentheorie verwendet werden können. In der Knotentheorie geht es darum, von in den \mathbb{R}^3 eingebetteten Schleifen zu untersuchen, ob sie ohne Selbstüberkreuzungen ineinander deformiert werden können. Stellt man sich z. B. die folgenden beiden Schleifen als Schnüre in \mathbb{R}^3 vor, so ist – obwohl sie als topologische Räume natürlich beide homöomorph zu

S^1 sind – anschaulich einleuchtend, dass man die eine nicht in die andere deformieren kann, da die rechte Schnur „verknötet“ ist.



Auch wenn man es zunächst einmal nicht erwarten würde, hat die Knotentheorie durchaus Anwendungen außerhalb der Mathematik – z. B. in der Biologie oder Chemie, wo Molekülketten derartige Formen haben können. Lassen sich dann zwei solche Molekülketten nicht ineinander deformieren, so stellen sie letztlich verschiedene Ketten dar und können auch unterschiedliche chemische Eigenschaften haben (z. B. wenn sie versuchen, sich mit anderen derartigen Ketten zu verbinden), obwohl sie unter Vernachlässigung ihrer Lage im Raum exakt dieselbe Molekülstruktur haben.

Aus mathematischer Sicht stellt sich natürlich vor allem erst einmal die Frage, wie man herausfinden kann, ob zwei gegebene Schleifen ineinander deformierbar sind oder nicht. Im obigen Beispielbild war das zwar noch anschaulich gut zu erkennen, aber für kompliziertere Schleifen ist das gar nicht mehr so einfach zu sehen – wie ja sicher jeder weiß, der schon einmal versucht hat, ein völlig verknötetes Verlängerungskabel zu entwirren. Und natürlich wollen wir als Mathematiker auch einen Beweis dafür haben, dass eine gewisse Schleife verknötet ist oder nicht.

Bevor wir kurz zeigen, wie Fundamentalgruppen bei dieser Fragestellung helfen können, sollten wir aber zuerst einmal exakt definieren, was die mathematischen Objekte sind, die wir untersuchen wollen. Um hinterher ein einfacheres Beispiel angeben zu können, erlauben wir dafür im Gegensatz zur obigen Diskussion Vereinigungen von mehreren Schleifen im Raum.

Definition 9.19 (Knoten).

- (a) Ein **Knoten** ist ein Teilraum $K \subset \mathbb{R}^3$, der homöomorph zu einer disjunkten Vereinigung $S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$ von Kreislinien ist.
- (b) Zwei Knoten $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^3$ heißen *äquivalent*, wenn es eine Homotopie $H: \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt, so dass gilt:
 - $H(\cdot, 0) = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$;
 - $H(\cdot, t): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist ein Homöomorphismus für alle $t \in I$;
 - $H(K_1, 1) = K_2$.

Mit anderen Worten sind K_1 und K_2 äquivalent zueinander, wenn man den einen durch Verformung des umgebenden Raumes in den anderen überführen kann.

Beispiel 9.20. Das folgende Bild zeigt zwei Knoten mit jeweils zwei Komponenten: zwei unverschlungene und zwei verschlungene Kreislinien.



(a) zwei unverschlungene Kreislinien

(b) zwei verschlungene Kreislinien

Bemerkung 9.21 (Unterscheidung von Knoten durch Fundamentalgruppen). In diesem Beispiel 9.20 ist es noch offensichtlicher als bei der oben betrachteten Schleife, dass diese beiden Knoten nicht äquivalent sind, also nicht ineinander deformiert werden können. Aber wie kann man das mathematisch exakt beweisen?

Für beliebige Knoten ist dies eine sehr schwierige (und in der Tat sogar noch ungelöste) Frage. In unserem konkreten Beispiel genügt aber schon ein recht einfaches Kriterium zur Unterscheidung der beiden Knoten. Beachte dazu, dass es für zwei äquivalente Knoten K_1 und K_2 nach Definition 9.19 (b) in jedem Fall einen Homöomorphismus $H(\cdot, 1): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt, der K_1 auf K_2 abbildet, und damit insbesondere auch einen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}^3 \setminus K_1$ und $\mathbb{R}^3 \setminus K_2$. Sind die beiden Knoten äquivalent, müssen also in jedem Fall die Fundamentalgruppen $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_1)$ und $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K_2)$ übereinstimmen.

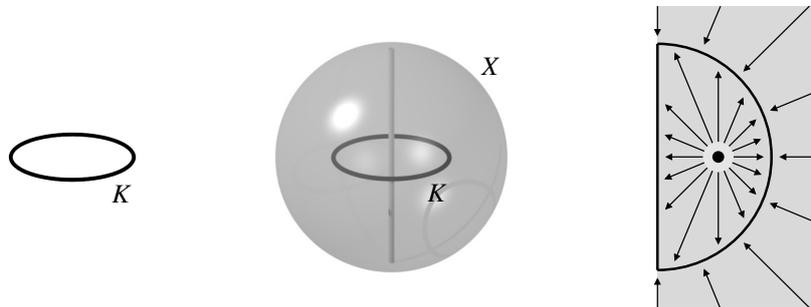
Wir wollen nun sehen, dass dies in Beispiel 9.20 nicht der Fall ist und die beiden Knoten damit nicht äquivalent sein können.

Beispiel 9.22. In diesem Beispiel werden wir für verschiedene Knoten K die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ des Komplements berechnen.

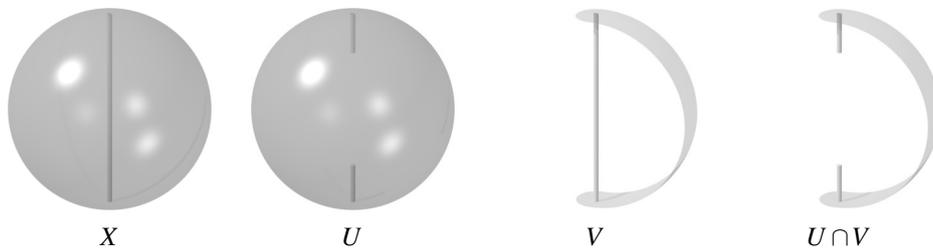
- (a) Es sei K eine einfache unverknotete Kreislinie wie im Bild unten links. Dann ist wie im mittleren Bild der Raum

$$X = S^2 \cup \{(0, 0, z) : |z| \leq 1\} \subset \mathbb{R}^3,$$

also die Kugeloberfläche zusammen mit einem Durchmesser durch K , ein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^3 \setminus K$. Dies sieht man wohl am einfachsten, wenn man einen Halbraum betrachtet, der durch den obigen Durchmesser begrenzt wird: Ein solcher Halbraum schneidet K in einem Punkt und X in einem Halbkreis zusammen mit seinem Durchmesser. Die Deformationsretraktion auf jedem solchen Halbraum ist im Bild unten rechts eingezeichnet: Die Punkte außerhalb von S^2 werden radial auf die Kugeloberfläche deformiert, und die Punkte innerhalb (die nicht auf K liegen) von innen an die Kugeloberfläche oder den Durchmesser von X gedrückt.



Nach Satz 7.14 (b) ist nun also $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi_1(X)$. Die Fundamentalgruppe von X schließlich können wir wieder mit der folgenden Zerlegung aus dem Satz 9.8 von Seifert und van Kampen berechnen:



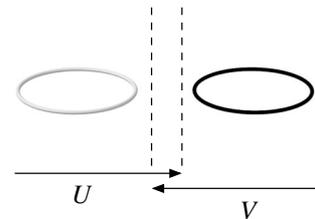
U hat die Sphäre S^2 als Deformationsretrakt und damit nach Beispiel eine triviale Fundamentalgruppe. Der Raum V dagegen ist homotopieäquivalent zu einer Kreislinie und hat daher Fundamentalgruppe $\pi_1(V) \cong \mathbb{Z}$. Der Durchschnitt $U \cap V$ schließlich ist kontrahierbar und damit einfach zusammenhängend. Mit Satz 9.8 ergibt sich also

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi_1(X) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \mathbb{Z},$$

wobei wir uns dieses Element von \mathbb{Z} als „Umlaufzahl durch den Durchmesser von X “ vorstellen können.

Beachte, dass wir für U und V nicht einfach die Kugeloberfläche und den Durchmesser hätten nehmen können – zum einen, weil $U \cap V$ dann nicht wegzusammenhängend gewesen wäre, und zum anderen, weil U und V dann nicht offen in X gewesen wären.

- (b) Wir betrachten für K nun die beiden unverschlungenen Kreislinien wie in Beispiel 9.20 (a). Wählen wir dann für U und V den Schnitt von $\mathbb{R}^3 \setminus K$ mit zwei Halbräumen wie im Bild rechts, so sind U und V homotopieäquivalent zum Komplement einer einfachen Kreislinie wie in (a) und haben damit Fundamentalgruppe \mathbb{Z} . Der Schnitt $U \cap V$ dagegen ist einfach zusammenhängend. Damit ergibt sich nach Satz 9.8



$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

- (c) Es sei nun K die Vereinigung der beiden verschlungenen Kreislinien aus Beispiel 9.20 (b). Zur Berechnung der Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}^3 \setminus K$ verformen wir die beiden Kreislinien zunächst so wie im folgenden Bild links dargestellt.



Das rechte Bild zeigt dann einen Deformationsretrakt X von $\mathbb{R}^3 \setminus K$; er besteht aus einer Sphäre S^2 , an die von innen ein Torus $S^1 \times S^1$ geklebt ist, der die helle Kreislinie von K in seinem Inneren enthält. Diese Deformationsretraktion von $\mathbb{R}^3 \setminus K$ nach X

- drückt die Punkte im Inneren des Torus von innen an die Toruswand;
- verhält sich auf den Punkten innerhalb von S^2 und außerhalb von $S^1 \times S^1$ analog zur Deformationsretraktion aus (a) und schiebt die Punkte von innen gegen die Sphäre oder von außen gegen den Torus; und
- ist außerhalb der Sphäre einfach die radiale Projektion von außen nach S^2 .

Nach Satz 7.14 (b) ist also wieder $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi_1(X)$. Um die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ zu berechnen, zerlegen wir X nun in eine offene Umgebung U von S^2 in X und eine offene Umgebung V von $S^1 \times S^1$ in X . Dann ist S^2 bzw. $S^1 \times S^1$ ein Deformationsretrakt von U bzw. V , und $U \cap V$ ist einfach zusammenhängend. Mit dem Satz 9.8 von Seifert und van Kampen erhalten wir also aufgrund von Beispiel 8.17 (b) und 9.10

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) \cong \pi_1(X) \cong \pi_1(U) * \pi_1(V) \cong \{1\} * (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Da die Fundamentalgruppen von $\mathbb{R}^3 \setminus K$ in den Fällen (b) und (c) verschieden sind, haben wir mit Bemerkung 9.21 also insbesondere bewiesen, dass die beiden unverschlungenen und verschlungenen Kreislinien aus Beispiel 9.20 keine äquivalenten Knoten sind, also nicht in \mathbb{R}^3 ineinander deformiert werden können.

Literatur

- [G1] A. Gathmann, *Algebraische Strukturen*, Vorlesungsskript TU Kaiserslautern (2023),
<https://agag-gathmann.math.rptu.de/ags>
- [G2] A. Gathmann, *Grundlagen der Mathematik*, Vorlesungsskript RPTU Kaiserslautern (2022/23),
<https://agag-gathmann.math.rptu.de/gdm>
- [G3] A. Gathmann, *Einführung in die Funktionentheorie*, Vorlesungsskript TU Kaiserslautern (2021/22),
<https://agag-gathmann.math.rptu.de/futheo>
- [H] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002)
- [J] K. Jänich, *Topologie*, Springer (2001)
- [Q] B. von Querenburg, *Mengentheoretische Topologie*, Springer (2001)

Index

- Abbildung
 - homotope 53
 - offene 45
 - stetige 14
- Abbildungszylinder 58
- abgeschlossene Menge 6
- Abschluss 10
- Äquivalenzrelation
 - erzeugte 39
- algebraische Topologie 52
- äquivalente Knoten 87

- Bahn 48
- Bahnenraum 48
- Basis
 - einer Topologie 8
- basis-offene Menge 9
- Berührungspunkt 10
- Blatt
 - einer Überlagerung 68
- Brouwerscher Fixpunktsatz 77
- Buchstabe 79

- D^n 6
- Deformationsretrakt 57
- Deformationsretraktion 57
- Diagonale 27
- dichte Teilmenge 10
- disjunkte Vereinigung 44
- diskontinuierliche Operation
 - eigentlich 68
 - freie 68
- diskrete Topologie 7

- Ebene
 - projektive 43
- eigentlich diskontinuierliche Operation 68
- einfach zusammenhängend 63
- Einheitsintervall 6
- Einheitskugel 6
- Einheitssphäre 6
- Einheitswürfel 6
- Einpunktkompaktifizierung 32
- erzeugte Äquivalenzrelation 39
- erzeugte Topologie 9
- erzeugter Normalteiler 81

- Faser
 - einer Überlagerung 68
- Fasertransport 72
- feinere Topologie 6
- Filter 16
- Finaltopologie 40
- Fixpunktsatz
 - von Brouwer 77
- Fortsetzungssatz
 - von Tietze 35
- frei diskontinuierliche Operation 68
- freie Homotopie 63
- freie Operation 68
- freies Produkt 80
- Fundamentalgruppe 61
- Fundamentalsatz
 - der Algebra 78
- Funktion
 - offene 45
- Funktor 64

- $\Gamma(X, x_0)$ 61
- Grad
 - einer Überlagerung 70
- größere Topologie 6
- Gruppe
 - topologische 66
- Gruppenoperation 47
 - eigentlich diskontinuierliche 68
 - frei diskontinuierliche 68
 - freie 68

- Halbstetigkeit 16
- Hausdorff-Raum 27
- Hochhebung 70
- Homöomorphismus 18
- homotope Abbildung 53
- Homotopie 53
 - freie 63
- Homotopieäquivalenz 55
- homotopieinvers 55

- I 6
- indiskrete Topologie 7
- Initialtopologie 17
- innerer Punkt 10
- Inneres 10
- inverser Weg 59

- Kategorie 64
- Kleinsche Flasche 42
- Knoten 87
 - äquivalente 87
- Kommutatoruntergruppe 83
- kompakter Raum 29
- Kompaktifizierung 32
- Komplement-abzählbar-Topologie 7
- Komplement-endlich-Topologie 7
- kontrahierbar 55

- Lebesgue
 - Lemma von 71
- Lebesgue-Zahl 71
- Lemma
 - von Lebesgue 71
 - von Urysohn 34
- Liftung 70

- Mannigfaltigkeit 50

- Menge
 - abgeschlossene 6
 - basis-offene 9
 - konvexe 53
 - offene 6
 - sternförmige 56
- mengentheoretische Topologie 52
- metrischer Raum 6
- Möbiusband 41
- Netz 16
- normaler Raum 32
- Normalteiler
 - erzeugter 81
- nullhomotop 61
- offene Abbildung 45
- offene Funktion 45
- offene Menge 6
- Operation 47
 - eigentlich diskontinuierliche 68
 - frei diskontinuierliche 68
 - freie 68
- Ordnungstopologie 26
- $\pi_1(X)$ 62
- $\pi_1(X, x_0)$ 61
- \mathbb{P}^n 48
- $\mathcal{P}(X)$ 5
- Peano-Kurve 19
- Postammetrik 7
- Potenzmenge 5
- Produkt
 - freies 80
 - semidirektes 75
- Produkttopologie 10
 - universelle Eigenschaft 17
- projektive Ebene 43
- projektiver Raum 48
- Punkt
 - innerer 10
- punktierter topologischer Raum 61
- quasikompakter Raum 29
- Quotientenraum 39
- Quotiententopologie 39
 - universelle Eigenschaft 40
- Rand 11
- Randpunkt 11
- Raum
 - einfach zusammenhängender 63
 - Hausdorff 27
 - homöomorpher 18
 - kompakter 29
 - kontrahierbarer 55
 - metrischer 6
 - normaler 32
 - projektiver 48
 - punktierter 61
 - quasikompakter 29
 - regulärer 33
 - T_2 33
 - T_3 33
 - T_4 33
- topologisch äquivalenter 18
- topologisch isomorpher 18
- topologischer 6
- wegzusammenhängender 22
- zusammenhängender 22
- zusammenziehbarer 55
- rechtsseitig stetig 16
- reelle projektive Ebene 43
- regulärer Raum 33
- Relativtopologie 8
- S^n 6
- Satz
 - von Brouwer 77
 - von Seifert und van Kampen 81
 - von Tietze 35
- Seifert
 - und van Kampen 81
- semidirektes Produkt 75
- Sorgenfrey-Topologie 10
- sternförmige Menge 56
- Stetigkeit 14
 - rechtsseitige 16
- T_2 -Raum 33
- T_3 -Raum 33
- T_4 -Raum 33
- Teilraumtopologie 8
- Tietze
 - Fortsetzungssatz 35
- Topologie 5
 - algebraische 52
 - diskrete 7
 - erzeugte 9
 - feinere 6
 - gröbere 6
 - indiskrete 7
 - Komplement-abzählbar- 7
 - Komplement-endlich- 7
 - mengentheoretische 52
 - von Sorgenfrey 10
- topologische Äquivalenz 18
- topologische Gruppe 66
- topologische Isomorphie 18
- topologischer Raum 6
 - äquivalenter 18
 - Hausdorff 27
 - isomorpher 18
 - kompakter 29
 - normaler 32
 - punktierter 61
 - quasikompakter 29
 - regulärer 33
 - T_2 33
 - T_3 33
 - T_4 33
 - wegzusammenhängender 22
 - zusammenhängender 22
- Torus 42
- triviale Überlagerung 68
- Überlagerung 68
 - triviale 68
 - universelle 76

- Umgebung 10
- Umlaufzahl 74
- Umparametrisierung 60
- universelle Eigenschaft
 - der Produkttopologie 17
 - der Quotiententopologie 40
- universelle Überlagerung 76
- Urysohn
 - Lemma von 34
- Vereinigung
 - disjunkte 44
- Weg 22, 59
 - frei homotoper 63
 - inverser 59
 - nullhomotoper 61
 - zusammengesetzter 59
- wegzusammenhängender Raum 22
- Wegzusammenhangskomponente 22
- Wort 79
- zusammengesetzter Weg 59
- zusammenhängender Raum 22
 - einfach 63
- Zusammenschlagen
 - auf einen Punkt 45
- zusammenziehbar 55