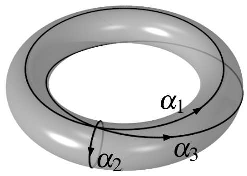
Andreas Gathmann und Cedric Brendel Sommersemester 2023

Einführung in die Topologie – Blatt 6

Abgabe: Freitag, 14. Juli bis 12:00 Uhr

(1) Im Torus $X = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ seien wie im Bild die drei geschlossenen Wege

$$\alpha_1 \colon I \to X,\ t \mapsto \overline{(t,0)},$$
$$\alpha_2 \colon I \to X,\ t \mapsto \overline{(0,t)},$$
$$\alpha_3 \colon I \to X,\ t \mapsto \overline{(t,t)}$$



gegeben.

(a) Finde für $i = 1,2,3$ jeweils eine Überlagerung $p_i \colon \tilde{X}_i \to X$ vom Grad 2, so dass die Hochhebung von α_i wieder geschlossen ist, die Hochhebung der beiden anderen Wege aber nicht.

(b) Schreibe diese Überlagerungen explizit als Restklassenabbildung einer geeigneten frei diskontinuierlichen Gruppenoperation auf $\tilde{X}_i$.

(2) Für $(a_1,a_2) \in \mathbb{Z}^2$ und $(b_1,b_2) \in \mathbb{R}^2$ setzen wir

$$(a_1,a_2) * (b_1,b_2) := (a_1 + (-1)^{a_2}\, b_1, a_2 + b_2) \quad \in \mathbb{R}^2.$$

Man prüft sofort nach, dass $(\mathbb{Z}^2, *)$ eine (nicht-abelsche) Gruppe ist — dies braucht ihr nicht aufzuschreiben. Sie heißt *semidirektes Produkt* von $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Z}$ und wird mit $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ bezeichnet. Man zeige:

(a) $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ operiert durch $*$ auf $\mathbb{R}^2$, und diese Operation ist frei diskontinuierlich.

(b) Der Quotientenraum $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ ist homöomorph zur Kleinschen Flasche.

(Nach Vorlesung ist die Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche damit isomorph zu $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$.)

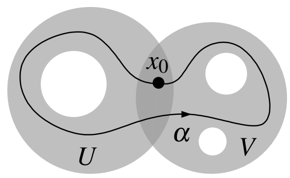
(3) Zeige, dass jede Überlagerung vom Grad 2 von der Form $p \colon \tilde{X} \to \tilde{X}/\mathbb{Z}_2$ für eine geeignete frei diskontinuierliche Gruppenoperation von $\mathbb{Z}_2$ auf einem topologischen Raum $\tilde{X}$ ist.

(4) Es seien U und V offene Teilmengen eines topologischen Raumes X, so dass $X = U \cup V$ gilt und $U \cap V$ wegzusammenhängend ist. Ferner sei $x_0 \in U \cap V$. Man zeige:

(a) Zu jedem Weg $\alpha \in \Gamma(X,x_0)$ gibt es Wege $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \Gamma(X,x_0)$, die alle komplett in U oder V liegen, so dass $[\alpha] = [\alpha_1] \bullet \cdots \bullet [\alpha_k]$ in $\pi_1(X,x_0)$ gilt.

(b) Ist $\pi_1(U,x_0) = \pi_1(V,x_0) = \{1\}$, so ist auch $\pi_1(X,x_0) = \{1\}$.

(c) $\pi_1(S^n) = \{1\}$ für alle $n \geq 2$.



$X = U \cup V$