Andreas Gathmann und Cedric Brendel Sommersemester 2023

Einführung in die Topologie – Blatt 5

Abgabe: Freitag, 30. Juni bis 12:00 Uhr

(1) Es seien (X,x_0) und (Y,y_0) zwei punktierte topologische Räume. Zeige, dass

$$\pi_1(X \times Y, (x_0,y_0)) \cong \pi_1(X,x_0) \times \pi_1(Y,y_0).$$

(2) Es sei X eine *topologische Gruppe*, d. h. ein topologischer Raum, der gleichzeitig eine Gruppenstruktur hat, so dass die Verknüpfung $X \times X \to X,\ (a,b) \mapsto a \cdot b$ und die Inversenbildung $X \to X,\ a \mapsto a^{-1}$ stetig sind. Wie üblich bezeichne $e \in X$ das neutrale Element von X.

Zeige, dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,e)$ dann abelsch ist. Welche der Gruppenaxiome werden im Beweis benötigt und welche nicht?

(Hinweis: Zeige und benutze die Gleichung $\alpha \bullet \beta = (\alpha \bullet \varepsilon) \cdot (\varepsilon \bullet \beta)$, wobei ε den konstanten Weg bei e bezeichnet.)

(3) Eine Operation einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X heißt …

- *frei*, wenn für alle $a \in X$ gilt, dass $a \neq g \cdot a$ für alle $g \in G \backslash \{e\}$;
- *frei diskontinuierlich*, wenn für alle $a \in X$ sogar eine offene Umgebung U_a von a in X existiert, so dass $U_a \cap g \cdot U_a = \emptyset$ für alle $g \in G \backslash \{e\}$.

(Wir werden in der Vorlesung noch sehen, dass diese Konzepte nützlich sind, da die Quotientenabbildung $X \to X/G$ im Fall einer frei diskontinuierlichen Operation eine Überlagerung ist.)

Es sei nun X ein Hausdorff-Raum. Man zeige:

(a) Operiert eine endliche Gruppe frei auf X, so ist diese Gruppenoperation auch frei diskontinuierlich.

(b) Für unendliche Gruppen ist dies im Allgemeinen falsch.

(4) Es sei V der (unendlich-dimensionale) Vektorraum aller beschränkten reellen Zahlenfolgen. Wir betrachten ihn als normierten Raum mit der Supremumsnorm $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_\infty := \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$.

Zeige, dass in diesem Raum die Einheitssphäre

$$S := \{(x_n)_n \in V : \|(x_n)_n\|_\infty = 1\}$$

kontrahierbar ist.

(Hinweis: Die Abbildung $f \colon V \to V,\ (x_0,x_1,x_2,\dots,) \mapsto (0,x_0,x_1,\dots)$ ist hierfür nützlich.)