Andreas Gathmann und Cedric Brendel Sommersemester 2023

Einführung in die Topologie – Blatt 4

Abgabe: Freitag, 16. Juni bis 12:00 Uhr

(1) Wir haben in der Vorlesung zwei Räume kennengelernt, die wir „reelle projektive Ebene“ genannt haben:

(a) $D^2/\sim$ mit der Relation $z \sim -z$ für alle $z \in S^1$ wie in Beispiel 5.9 (c);

(b) $\mathbb{P}^2 = (\mathbb{R}^3 \backslash \{0\})/(\mathbb{R} \backslash \{0\})$ wie in Konstruktion 5.24.

Zeige, dass diese beiden Konstruktionen homöomorphe Räume ergeben.

(2) Eine endliche Gruppe G operiere auf einem normalen Hausdorff-Raum X. Beweise, dass dann auch der Quotientenraum X/G ein normaler Hausdorff-Raum ist.

(Insbesondere zeigt dies also, dass die reellen projektiven Räume $\mathbb{P}^n \cong S^n/\mathbb{Z}_2$ normale Hausdorff-Räume sind.)

(3) Es seien X ein topologischer Raum, $a \in S^1$ und $f\colon S^1 \to X$ eine stetige Abbildung. Beweise, dass dann die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist homotop relativ $\{a\}$ zu einer konstanten Abbildung.

(b) f ist homotop zu einer konstanten Abbildung.

(c) f lässt sich zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f}\colon D^2 \to X$ fortsetzen.

(4) Zu einer stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ sei $M_f = (X \times I) \cup_g Y$ mit der Abbildung

$$g\colon X \times \{1\} \to Y,\ (x,1) \mapsto f(x).$$

Man nennt M_f den *Abbildungszylinder* von f.

(a) Zeichne ein Bild von M_f für die Fälle der Inklusionsabbildung $f\colon S^1 \to \mathbb{C}$ und der Abbildung $f\colon S^1 \to S^1,\ z \mapsto z^2$.

(b) Zeige, dass sich jede stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ als Verkettung von zwei stetigen Abbildungen $X \xrightarrow{g} M_f \xrightarrow{h} Y$ schreiben lässt, wobei g eine Einbettung (also eine injektive Abbildung, die ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist) und h eine Homotopieäquivalenz ist.