Andreas Gathmann und Cedric Brendel Sommersemester 2023

Einführung in die Topologie – Blatt 3

Abgabe: Freitag, 2. Juni bis 12:00 Uhr

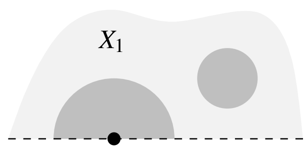
(1) Man nehme einen Zylindermantel $X = S^1 \times I \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ und verklebe an einem der beiden Ränder jeden Punkt mit seinem gegenüberliegenden, d. h. betrachte den Raum $X/\sim$ für die Relation $(z,1) \sim (-z,1)$ für alle $z \in S^1$.

Zeige sowohl durch einen mathematischen Beweis als auch (ohne Abgabe) durch Basteln, dass dieser Raum homöomorph zum Möbiusband ist.

(2) Zeige, dass die Sorgenfrey-Topologie auf $\mathbb{R}$ normal ist.

(3) Wir betrachten die folgenden beiden topologischen Räume:

- $X_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, wobei die Topologie erzeugt wird von allen offenen Kreisschreiben, die die reelle Achse nicht treffen, und allen Mengen $\{a\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 \text{ und } |z-a| < \varepsilon\}$ für $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ wie im Bild rechts.



- $X_2 = (0,1) \subset \mathbb{R}$ mit außer $\emptyset$ und X_2 genau den offenen Mengen der Form $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$ für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

Ihr braucht nicht zu zeigen, dass es sich dabei wirklich um Topologien handelt. Benutzt diese Räume, um folgende Aussagen zu zeigen:

(a) Nicht jeder Hausdorff-Raum ist normal.

(b) Ein Raum X heißt *regulär*, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ mit $x \notin A$ offene Mengen $U \ni x$ und $V \supset A$ gibt mit $U \cap V = \emptyset$. Diese Bedingung ist weder zur Hausdorff-Eigenschaft noch zur Normalität äquivalent.

(4) Es sei X ein kompakter Hausdorff-Raum, der lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist, d. h. zu jedem $x \in X$ gibt es einen Homöomorphismus $f_x \colon U_x \to V_x$ von einer offenen Umgebung U_x von x in eine offene Teilmenge $V_x \subset \mathbb{R}^n$. Man nennt einen solchen Raum auch eine n-dimensionale kompakte *Mannigfaltigkeit*. Zeige:

(a) Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine abgeschlossene Umgebung $A_x \subset U_x$ sowie stetige Funktionen $\tilde{f}_x \colon X \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{g}_x \colon X \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}_x|_{A_x} = f_x|_{A_x}$ und $\tilde{g}_x^{-1}(\{0\}) = A_x$.

(b) X lässt sich für ein geeignetes $N \in \mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}^N$ einbetten, d. h. X ist homöomorph zu einem Teilraum von $\mathbb{R}^N$.

(c) Lässt man die Voraussetzung der Kompaktheit oder des Hausdorff-Raumes weg, so muss X nicht unbedingt homöomorph zu einem Teilraum von $\mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$ sein.