Andreas Gathmann und Cedric Brendel Sommersemester 2023

Einführung in die Topologie – Blatt 2

Abgabe: Freitag, 19. Mai bis 12:00 Uhr

(1) Es sei X ein Hausdorff-Raum, der nicht kompakt ist. Wir wollen in dieser Aufgabe untersuchen, wie man X durch Hinzunehmen eines „unendlich fernen Punktes“ zu einem kompakten Raum machen kann. Dazu setzen wir $\hat{X} := X \cup \{\infty\}$ (wobei „∞“ einfach nur der Name des neu hinzugefügten Punktes ist) sowie

$$\mathscr{T} := \{U : U \subset X \text{ offen}\} \cup \{\hat{X}\backslash K : K \subset X \text{ kompakt}\} \quad \subset \mathscr{P}(\hat{X}).$$

Man zeige:

(a) $\mathscr{T}$ ist eine Topologie auf $\hat{X}$, und $\hat{X}$ ist mit dieser Topologie kompakt.

(b) X liegt dicht in $\hat{X}$.

(c) Besitzt in X jeder Punkt eine kompakte Umgebung, so ist auch $\hat{X}$ ein Hausdorff-Raum.

Man nennt $\hat{X}$ die *Einpunktkompaktifizierung* von X.

(2) Es bezeichne $\hat{X}$ noch einmal die Einpunktkompaktifizierung eines topologischen Raumes X wie in Aufgabe 1.

(a) Zeige, dass $\hat{\mathbb{R}}$ homöomorph zur Kreislinie S^1 ist.
(Folgerung 4.14 kann hierfür bereits verwendet werden.)

(b) Es sei $(a_n)_n$ eine Folge in einem topologischen Raum Y. Wir können diese Folge dann natürlich auch als Funktion $f\colon \mathbb{N} \to Y$, $n \mapsto a_n$ auffassen.
Zeige, dass $(a_n)_n$ genau dann gegen ein $a \in Y$ konvergiert, wenn sich diese Funktion f durch die Festsetzung $f(\infty) := a$ zu einer stetigen Funktion von $\hat{\mathbb{N}}$ nach Y fortsetzen lässt.

(3) Anschaulich erklärt man Stetigkeit ja oft so, dass eine Funktion genau dann stetig ist, wenn man ihren Graphen zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen.
Beweise die folgende mathematisch exakte Version dieser Aussage: Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig, wenn ihr Graph $\Gamma := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ wegzusammenhängend ist.

(4) Wir betrachten auf dem Einheitsquadrat I^2 die lexikografische Ordnung

$$x < y \quad :\Leftrightarrow \quad x_1 < y_1 \text{ oder } (x_1 = y_1 \text{ und } x_2 < y_2)$$

und die dazugehörige *Ordnungstopologie* $\mathscr{T}$, die von den „offenen Intervallen“

$$\{x \in I^2 : a < x < b\}, \quad \{x \in I^2 : a < x\} \quad \text{und} \quad \{x \in I^2 : x < b\}$$

mit $a, b \in I^2$ erzeugt wird. Man zeige:

(a) I^2 ist mit dieser Ordnungstopologie zusammenhängend.
(Hinweis: Für alle $c \in I$ ist die zugehörige Teilraumtopologie auf dem Streifen $\{c\} \times I$ genau die Standardtopologie.)

(b) I^2 ist mit dieser Ordnungstopologie nicht wegzusammenhängend.