Andreas Gathmann und Cedric Brendel Sommersemester 2023

Einführung in die Topologie – Blatt 1

Abgabe: Freitag, 5. Mai bis 12:00 Uhr

(1) Man beweise oder widerlege: Für zwei Teilmengen A und B eines topologischen Raumes X gilt

(a) $(A\cup B)^\circ \subset \mathring{A}\cup\mathring{B}$; (b) $\overline{A\cup B}\subset \overline{A}\cup\overline{B}$; (c) $\partial(A\cup B)\subset \partial A\cup\partial B$.

(2) Wir betrachten die durch die Postamtmetrik

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x=y, \\ \|x\|_2+\|y\|_2 & \text{für } x\neq y \end{cases}$$

definierte Topologie $\mathscr{T}$ auf $\mathbb{R}^2$.

(a) Zeige, dass für $x\in\mathbb{R}^2$ die einpunktige Menge $\{x\}$ genau dann offen bzgl. $\mathscr{T}$ ist, wenn $x\neq 0$ ist.

(b) Bestimme eine möglichst einfache Basis der Topologie $\mathscr{T}$.

(c) In welchen Punkten ist die Abbildung $f\colon (\mathbb{R}^2,\mathscr{T})\to(\mathbb{R}^2,\mathscr{T}),\ (x_1,x_2)\mapsto(x_1+1,x_2)$ stetig?

(3) Es seien $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion und $a\in\mathbb{R}$.

(a) Die Funktion f heißt in a *rechtsseitig stetig*, wenn $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\geq a}} f(x)=f(a)$ gilt.

Zeige, dass diese Bedingung äquivalent ist zur Stetigkeit in a als Abbildung $f\colon(\mathbb{R},\mathscr{T})\to\mathbb{R}$, wobei $\mathscr{T}$ die Sorgenfrey-Topologie ist und der Zielraum die Standardtopologie hat.

(b) Die Funktion f heißt in a *halbstetig von oben*, wenn

$$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}\ \exists\delta\in\mathbb{R}_{>0}\ \forall x\in\mathbb{R}:\ |x-a|<\delta\ \Rightarrow\ f(x)-f(a)<\varepsilon.$$

Konstruiere eine Topologie $\mathscr{T}$ auf $\mathbb{R}$, so dass diese Bedingung äquivalent ist zur Stetigkeit in a als Abbildung $f\colon\mathbb{R}\to(\mathbb{R},\mathscr{T})$, wobei der Startraum die Standardtopologie hat.
Was bedeutet diese Bedingung anschaulich?

(4) (a) Man zeige: In der Komplement-abzählbar-Topologie auf einer Menge X konvergiert eine Folge $(x_n)_n$ genau dann gegen ein $a\in X$, wenn $x_n=a$ für fast alle n gilt. (Wie ist eigentlich Folgenkonvergenz in einem topologischen Raum definiert?)

(b) Man gebe ein Beispiel für eine Abbildung $f\colon X\to Y$ zwischen topologischen Räumen an, die in einem Punkt $a\in X$ zwar das Folgenkriterium

$$\text{für jede Folge } (x_n)_n \text{ in } X \text{ mit } x_n\to a \text{ gilt } f(x_n)\to f(a)$$

erfüllt, die aber dennoch *nicht* stetig in a ist.
Warum genau kann der aus den „Grundlagen der Mathematik“ bekannte Beweis des Folgenkriteriums für Stetigkeit nicht auf beliebige topologische Räume verallgemeinert werden?

Die Abgabe der Lösungen kann in bis zu Dreiergruppen erfolgen. Bitte werft eure Lösungen in Cedrics Postfach neben Raum 48-210 oder gebt sie online als PDF-Datei im Abgabebaustein des OLAT-Kurses ab.