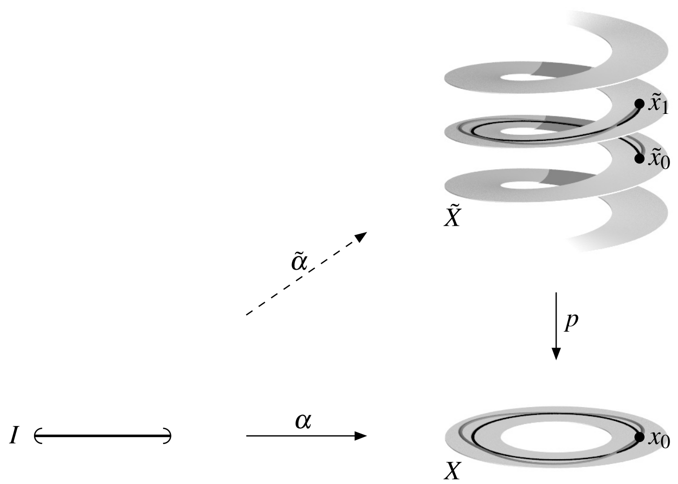
8. Überlagerungen

In den letzten beiden Kapiteln haben wir das Konzept von homotopen, also ineinander deformierbaren Abbildungen eingeführt, und daraus zu einem punktierten topologischen Raum (X,x_0) die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ konstruiert. Dabei war es meistens recht einfach zu zeigen, dass zwei Abbildungen homotop zueinander sind: Man kann hier in der Regel einfach eine Homotopie zwischen ihnen konkret angeben. Wenn zwei Abbildungen jedoch nicht zueinander homotop sind, ist dies zwar oftmals auch anschaulich leicht einzusehen, aber viel schwieriger zu beweisen. Unser Standardbeispiel hierfür war die sofort einleuchtende, aber bisher noch unbewiesene Aussage aus Beispiel 6.3 (c), dass es Abbildungen $S^1 \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ gibt, die nicht homotop zu einer konstanten Abbildung sind – und dass die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{C}\backslash\{0\})$ demzufolge nicht trivial ist (siehe Beispiel 7.6). Wir wollen in diesem Kapitel nun sehen, wie man diese und ähnliche Aussagen exakt beweisen kann. Da dies an manchen Stellen etwas technisch wird, wollen wir zunächst die Beweisidee klar heraus stellen.

Bemerkung 8.1 (Idee der Überlagerungen)**.** Wie im Bild unten seien $X = \{z \in \mathbb{C} : r \le |z| \le R\}$ ein Kreisring in $\mathbb{C}$ und $x_0 \in X$. Ferner sei $\alpha\colon I \to X$ ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt x_0 – im Bild unten ist ein solcher Weg, der einmal um das „Loch“ in X herum läuft, schwarz eingezeichnet. Wir wollen zeigen, dass diese Schleife in X nicht zu einem Punkt zusammengezogen werden kann, also α nicht homotop relativ $\{0,1\}$ zu einer konstanten Abbildung ist.



Wir betrachten dazu die im Bild dargestellte Spirale $\tilde{X}$ mit ihrer Projektion p auf X, also z. B.

$$\tilde{X} = [r,R] \times \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad p\colon \tilde{X} \to X,\ (u,v) \mapsto u\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} v},$$

und wählen einen Punkt $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$. Man nennt diese Situation eine *Überlagerung* von X (Definition 8.2). Die Idee ist nun, eine „Hochhebung“ $\tilde{\alpha}$ des Weges α nach $\tilde{X}$ zu suchen, also einen Weg $\tilde{\alpha}\colon I \to \tilde{X}$ mit $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$, der in $\tilde{x}_0$ beginnt. Mit anderen Worten soll $\tilde{\alpha}(t)$ also im Bild oben für alle t direkt über $\alpha(t)$ liegen. Wir werden nun in diesem Kapitel die folgenden Aussagen zeigen, die aus dem Bild bereits anschaulich zu erwarten sind:

(a) Eine solche Hochhebung existiert stets, und ist auch eindeutig (Folgerung 8.12 (a)). Sie ist jedoch in der Regel wie im Bild oben kein geschlossener Weg in $\tilde{X}$, sondern endet an irgendeinem Punkt $\tilde{x}_1$ mit $p(\tilde{x}_1) = x_0$ – abhängig davon, „wie oft α um das Loch in X herumläuft“.

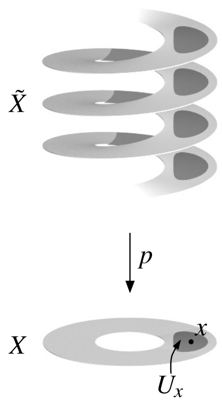
(b) Deformiert man den Weg α relativ $\{0,1\}$ (wie etwa im Bild zu dem grau eingezeichneten Weg), so „deformiert die Hochhebung mit“ und behält dabei den gleichen Endpunkt $\tilde{x}_1$ (Folgerung 8.12 (b)).

Auf diese Art erhalten wir also eine wohldefinierte Abbildung, die jeder Homotopieklasse $[\alpha]$ in $\pi_1(X,x_0)$ den Endpunkt $\tilde{\alpha}(1)$ der Hochhebung $\tilde{\alpha}$ zuordnet. Sind diese Endpunkte bei zwei Wegen verschieden – im Bild oben z. B. $\tilde{x}_1$ für den eingezeichneten Weg und $\tilde{x}_0$ für einen konstanten Weg – so können die beiden Wege also nicht homotop relativ $\{0,1\}$ sein und definieren damit auch unterschiedliche Elemente in der Fundamentalgruppe. Bei geeigneter Wahl der Überlagerung, z. B. im Beispiel oben, ist die obige Abbildung von $\pi_1(X,x_0)$ nach $p^{-1}(\{x_0\})$ sogar bijektiv (Satz 8.16), so dass wir auf diese Art auch die Fundamentalgruppe als Urbild von x_0 unter p berechnen können. Im Beispiel ergibt sich damit $\pi_1(X,x_0) \cong \mathbb{Z}$ (Beispiel 8.17 (a)); die Homotopieklasse eines Weges gibt gerade seine Umlaufzahl um das Loch in X an.

10

Das Ziel dieses Kapitels ist es, diese Überlegungen in eine mathematisch exakte Sprechweise zu übersetzen. Dazu müssen wir zunächst definieren, was wir unter einer Überlagerung $\pi\colon \tilde{X} \to X$ verstehen wollen. Die wesentliche Eigenschaft in Bemerkung 8.1 oben war dabei, dass $\tilde{X}$ um jeden Punkt lokal genauso aussieht wie X um den entsprechenden Bildpunkt. Dies ist der Inhalt der folgenden Definition.

Definition 8.2 (Überlagerungen)**.** Eine stetige Abbildung $p\colon \tilde{X} \to X$ heißt **Überlagerung**, wenn es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung U_x von x in X gibt, so dass das Urbild $p^{-1}(U_x)$ wie im Bild rechts dunkel eingezeichnet eine disjunkte Vereinigung offener Teilmengen von $\tilde{X}$ ist, die unter p homöomorph auf U_x abgebildet werden. Man nennt diese offenen Teilmengen von $\tilde{X}$ die (lokalen) **Blätter** der Überlagerung; die Urbildmenge $p^{-1}(\{x\})$ wird **Faser** von p über x genannt. Man sagt auch, dass p über U_x eine **triviale Überlagerung** ist.



Ein solches Bild haben wir bereits in Beispiel 5.23 in Form der Restklassenabbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ gesehen. In der Tat werden praktisch alle unsere Überlagerungen derartige Restklassenabbildungen von Gruppenoperationen sein. Wir wollen daher jetzt allgemein untersuchen, welche Bedingungen eine Gruppenoperation erfüllen muss, um auf diese Art zu einer Überlagerung zu führen.

Definition 8.3 (Freie und frei diskontinuierliche Gruppenoperationen)**.** Eine Gruppe G mit neutralem Element e operiere (stetig wie in Bemerkung 5.22) auf einem topologischen Raum $\tilde{X}$. Dann heißt die Gruppenoperation …

(a) **frei**, wenn für alle $a \in \tilde{X}$ gilt, dass $a \neq g \cdot a$ für alle $g \in G\backslash\{e\}$.

(b) **frei diskontinuierlich** (manchmal in der Literatur auch *eigentlich diskontinuierlich*), wenn für alle $a \in \tilde{X}$ sogar eine offene Umgebung U_a von a in $\tilde{X}$ existiert, so dass $U_a \cap g \cdot U_a = \emptyset$ für alle $g \in G\backslash\{e\}$.

Lemma 8.4 (Überlagerungen aus frei diskontinuierlichen Operationen)**.** *Eine Gruppe G operiere auf einem topologischen Raum $\tilde{X}$. Wir bezeichnen die zugehörige Restklassenabbildung wie in Definition 5.21 mit $p\colon \tilde{X} \to X := \tilde{X}/G$.*

(a) *Ist die Gruppenoperation frei, so ist für alle $a \in \tilde{X}$ die Abbildung $G \to p^{-1}(\overline{a})$, $g \mapsto g \cdot a$ bijektiv.*

(b) *Ist die Gruppenoperation sogar frei diskontinuierlich, so ist p eine Überlagerung.*

Beweis.

(a) Nach Definition von $\tilde{X}/G$ ist $p^{-1}(\overline{a}) = \{g \cdot a : g \in G\}$, d. h. die gegebene Abbildung ist surjektiv.

Sie ist auch injektiv, denn aus $g \cdot a = h \cdot a$ mit $g, h \in G$ folgt $a = g^{-1} \cdot h \cdot a$ und somit nach Definition 8.3 (a) auch $g^{-1} \cdot h = e$, also $g = h$.

(b) Für $\overline{a} \in X$, also $a \in \tilde{X}$, sei U_a eine offene Umgebung von a in $\tilde{X}$ wie in Definition 8.3 (b). Wir behaupten, dass p dann über $\overline{U_a} = p(U_a)$ eine triviale Überlagerung ist: Es gilt zunächst

$$p^{-1}(\overline{U_a}) = \{g \cdot x : g \in G, x \in U_a\} = \bigcup_{g \in G} g \cdot U_a,$$

und die nach Bemerkung 5.22 offenen Mengen $g \cdot U_a$ vereinigen sich wegen

$$(g \cdot U_a) \cap (h \cdot U_a) = g(U_a \cap \underbrace{(g^{-1} \cdot h)}_{\neq e} \cdot U_a) = \emptyset \quad \text{für } g, h \in G \text{ mit } g \neq h$$

disjunkt zu $p^{-1}(\overline{U_a})$. Damit ist die Einschränkung $p|_{g \cdot U_a} \colon g \cdot U_a \to \overline{U_a}$, $g \cdot x \mapsto \overline{x}$ auch bijektiv. Sie bildet weiterhin offene Mengen auf offene Mengen ab: Für eine offene Menge V in $g \cdot U$ ist auch V offen in $\tilde{X}$, also auch $p^{-1}(p(V)) = \bigcup_{h \in G} h \cdot V$ in $\tilde{X}$ und damit nach Definition der Quotiententopologie $p(V)$ in X. Daher ist sie ein Homöomorphismus, d. h. p ist eine Überlagerung. □

Aufgabe 8.5. Es sei $\tilde{X}$ ein Hausdorff-Raum. Man zeige:

(a) Operiert eine endliche Gruppe frei auf $\tilde{X}$, so ist diese Gruppenoperation auch frei diskontinuierlich (so dass die Quotientenabbildung $\pi \colon \tilde{X} \to X := \tilde{X}/G$ also eine Überlagerung ist).

(b) Für unendliche Gruppen ist dies im Allgemeinen falsch.

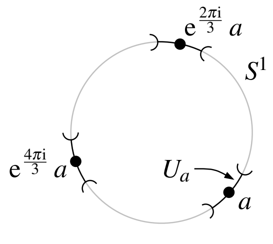
Beispiel 8.6.

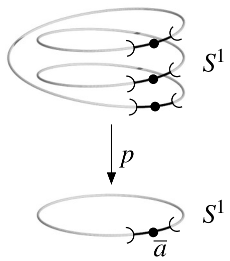
(a) Die Gruppenoperation von $(\mathbb{Z}, +)$ auf $\mathbb{R}$ durch Addition wie in Beispiel 5.23 ist frei diskontinuierlich, denn für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $U_a = (a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$ eine offene Umgebung mit $U_a \cap (g + U_a) = \emptyset$ für alle $g \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$. Also ist die Quotientenabbildung $p \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$ nach Lemma 8.4 eine Überlagerung – was aus dem Bild in Beispiel 5.23 ja auch anschaulich erkennbar ist.

(b) Für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ operiere die Gruppe $\mathbb{Z}_n$ auf $S^1 \subset \mathbb{C}$ durch

$$\overline{k} \cdot a := e^{2\pi i \frac{k}{n}} a \quad \text{für } \overline{k} \in \mathbb{Z}_n \text{ und } a \in S^1.$$

Die Bahn eines Elements $a \in S^1$ besteht also – wie im Bild unten links für $n = 3$ dargestellt – aus den Ecken eines regelmäßigen n-Ecks im Einheitskreis.





Offensichtlich ist diese Operation frei, denn es ist $a \neq e^{2\pi i \frac{k}{n}} a$ für alle $\overline{k} \neq \overline{0} \in \mathbb{Z}_n$. Sie ist damit nach Aufgabe 8.5 (a) auch frei diskontinuierlich. Natürlich könnte man dies auch direkt sehen: Für eine genügend kleine Umgebung U_a von a wie im Bild oben sind die offenen Mengen U_a, $e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot U_a$ und $e^{\frac{4\pi i}{3}} \cdot U_a$ disjunkt.

Das zugehörige Bild der Überlagerung $p \colon S^1 \to S^1/\mathbb{Z}_n$ ist im Bild oben rechts dargestellt: Nachdem man ein n-tel des Einheitskreises durchlaufen hat, ist man im Quotientenraum wieder am Anfangspunkt angelangt. Wie in Beispiel 5.23 folgt damit, dass $S^1/\mathbb{Z}_n \cong S^1$ mit dem Homöomorphismus $S^1/\mathbb{Z}_n \to S^1$, $\overline{a} \mapsto a^n$. Unter diesem Homöomorphismus ist die Überlagerungsabbildung damit also einfach $p \colon S^1 \to S^1$, $a \mapsto a^n$.

(c) In Konstruktion 5.24 (a) haben wir gesehen, dass die reelle projektive Ebene als $\mathbb{P}^2 \cong S^2/\mathbb{Z}_2$ geschrieben werden kann, wobei $\mathbb{Z}_2 \cong (\{\pm 1\}, \cdot)$ auf S^2 durch Multiplikation operiert, also gegenüberliegende Punkte identifiziert. Da diese Operation frei ist, ist sie nach Aufgabe 8.5 (a) auch frei diskontinuierlich, und die Quotientenabbildung $p\colon S^2 \to S^2/\mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{P}^2$ ist nach Lemma 8.4 eine Überlagerung.

Bemerkung 8.7 (Grad einer Überlagerung)**.** Für eine Überlagerung $p\colon \tilde{X} \to X$ und $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sei

$$V_n := \{x \in X : |p^{-1}(\{x\})| = n\} \quad \subset X$$

die Menge aller Punkte in X, über denen die Faser von p genau n Elemente hat. Nach der Definition einer Überlagerung ist V_n offen: Ist nämlich $x \in V_n$ und U_x eine offene Umgebung von x, über der die Überlagerung p trivial ist, so besteht $p^{-1}(U_x)$ aus genau n Blättern, die durch p homöomorph auf U_x abgebildet werden. Dies bedeutet aber gerade, dass jeder Punkt in U_x genau n Urbilder unter p hat, also in V_n liegt. Also gilt $U_x \subset V_n$, d. h. V_n ist offen.

Weiterhin bilden die Mengen V_n für $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ offensichtlich eine disjunkte Zerlegung von X. Ist X zusammenhängend, so kann man X nach Definition 3.1 (b) aber nicht auf nicht-triviale Art als disjunkte Vereinigung von offenen Mengen schreiben. Also ist dann nur ein V_n nicht-leer, und damit gleich X: Jede Faser von p hat dann die gleiche Anzahl n von Elementen. Man nennt dieses n den **Grad** der Überlagerung.

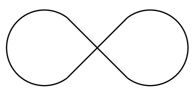
Bei einer Überlagerung der Form $p\colon \tilde{X} \to \tilde{X}/G$ wie in Lemma 8.4 ist der Grad offensichtlich gleich $|G|$, da alle Fasern bijektiv zu G sind. In den drei Fällen von Beispiel 8.6 ist der Grad also gleich ∞, n bzw. 2.

Aufgabe 8.8.

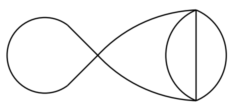
(a) Zeige, dass jede Überlagerung vom Grad 2 von der Form $p\colon \tilde{X} \to \tilde{X}/\mathbb{Z}_2$ für eine geeignete frei diskontinuierliche Gruppenoperation von $\mathbb{Z}_2$ auf einem topologischen Raum $\tilde{X}$ ist.

(b) Es seien nun X und $\tilde{X}$ die „eindimensionalen" Räume, die durch Verkleben von zwei bzw. sechs Intervallen an ihren Endpunkten wie im Bild unten entstehen.

Zeige, dass es eine Überlagerung $p\colon \tilde{X} \to X$ gibt, aber dass diese Überlagerung nicht von der Form $p\colon \tilde{X} \to \tilde{X}/G$ für eine geeignete Operation einer Gruppe G auf $\tilde{X}$ sein kann.



X



$\tilde{X}$

Wie in der Einleitung zu diesem Kapitel erläutert wollen wir zu einer Überlagerung $p\colon \tilde{X} \to X$ und einer Abbildung $f\colon Y \to X$ nun Hochhebungen $\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}$ betrachten.

Definition 8.9 (Hochhebungen)**.**

(a) Es sei $p\colon \tilde{X} \to X$ eine Überlagerung und $f\colon Y \to X$ eine stetige Abbildung von einem weiteren topologischen Raum Y nach X. Dann heißt eine stetige Abbildung $\tilde{f}\colon Y \to \tilde{X}$ eine **Hochhebung** (oder auch **Liftung**) von f, wenn $p \circ \tilde{f} = f$.

(b) Sind zusätzlich $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $x_0 \in X$ und $y_0 \in Y$ Punkte mit $p(\tilde{x}_0) = x_0$ und $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ (also auch $f(y_0) = x_0$), so nennen wir die Abbildung $p\colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ auch eine Überlagerung von punktierten Räumen, und dementsprechend $\tilde{f}\colon (Y, y_0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ eine Hochhebung von $f\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)$.

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

Unser Ziel ist es, im Fall eines Einheitswürfels $Y = I^n$ als Startraum die Existenz und Eindeutigkeit solcher Hochhebungen zu beweisen. Dazu benötigen wir zunächst ein Lemma.

Lemma 8.10 (Lemma von Lebesgue). *Es sei $(U_i)_{i \in J}$ eine offene Überdeckung eines kompakten metrischen Raumes X. Dann gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass jede offene ε-Kugel (mit beliebigem Mittelpunkt) in X bereits in einem U_i enthalten ist.*

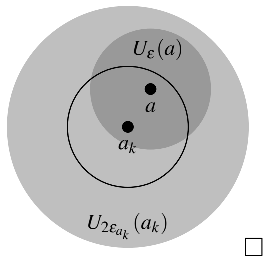
*Man nennt ein solches ε eine **Lebesgue-Zahl** der Überdeckung.*

Beweis. Da die Mengen U_i eine offene Überdeckung von X bilden, gibt es zu jedem $a \in X$ ein $\varepsilon_a \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass die offene Kugel $U_{2\varepsilon_a}(a)$ um a mit Radius $2\varepsilon_a$ ganz in einem U_i liegt.

Die Kugeln $U_{\varepsilon_a}(a)$ mit dem jeweils halben Radius bilden dann eine offene Überdeckung von X. Weil X kompakt ist, können wir aus ihnen eine endliche Teilüberdeckung $U_{\varepsilon_{a_1}}(a_1) \cup \cdots \cup U_{\varepsilon_{a_n}}(a_n)$ auswählen. Weiterhin setzen wir $\varepsilon := \min(\varepsilon_{a_1}, \dots, \varepsilon_{a_n})$.

Ist nun $a \in X$ beliebig, so ist zunächst $a \in U_{\varepsilon_{a_k}}(a_k)$ für ein $k \in \{1, \dots, n\}$, da diese offenen Mengen X überdecken. Für dieses k gilt dann aber $U_\varepsilon(a) \subset U_{2\varepsilon_{a_k}}(a_k)$, denn für alle $x \in U_\varepsilon(a)$ ist

$$d(x, a_k) \leq d(x,a) + d(a, a_k) < \varepsilon + \varepsilon_{a_k} \leq 2\varepsilon_{a_k}.$$



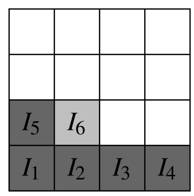
Da $U_{2\varepsilon_{a_k}}(a_k)$ nach Konstruktion in einer der offenen Mengen U_i der gegebenen Überdeckung liegt, gilt dies also wie behauptet auch für die Kugel $U_\varepsilon(a)$. □

Satz 8.11 (Existenz und Eindeutigkeit von Hochhebungen)**.** *Es seien $p \colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung und $f \colon (I^n, 0) \to (X, x_0)$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es genau eine Hochhebung $\tilde{f} \colon (I^n, 0) \to (\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ von f bezüglich p.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, in dem das Bild $f(I^n)$ ganz in einer offenen Menge $U \subset X$ enthalten ist, über der p eine triviale Überlagerung ist. Dann ist die Aussage des Satzes klar: Ist $V \subset p^{-1}(U)$ das Blatt der Überlagerung, in dem $\tilde{x}_0$ liegt, so können und müssen wir f natürlich durch $\tilde{f} := (p|_V)^{-1} \circ f$ in dieses Blatt hinein fortsetzen (diese Fortsetzung ist möglich, da $p|_V$ nach Definition 8.2 ein Homöomorphismus ist; und wir können das Bild von f nicht auf verschiedene Blätter aufteilen, da $f(I^n)$ sonst im Widerspruch zu Lemma 3.6 (b) unzusammenhängend wäre).

Im allgemeinen Fall wählen wir zunächst zu jedem Punkt $a \in X$ eine offene Umgebung U_a wie in Definition 8.2, über der p trivial überlagert. Dann bilden diese Mengen eine offene Überdeckung von X, und die Mengen $f^{-1}(U_a)$ damit eine offene Überdeckung des kompakten Einheitswürfels I^n. Nach Lemma 8.10 gibt es zu dieser Überdeckung von I^n eine Lebesgue-Zahl ε. Wir unterteilen I^n nun wie im Bild unten rechts in k^n Teilwürfel $I_1, \dots, I_{k^n}$ der Kantenlänge $\frac{1}{k}$, so dass jeder dieser kleineren Würfel in einer ε-Kugel enthalten ist und nach Wahl von ε damit von f ganz in eine offene Menge abgebildet wird, über der p eine triviale Überlagerung ist.

Damit können wir die gesuchte Hochhebung $\tilde{f}$ nun der Reihe nach auf $I_1, \dots, I_{k^n}$ konstruieren (die genaue Reihenfolge spielt dabei keine Rolle, solange wir „von links unten nach rechts oben" vorgehen, also für alle $m = 1, \dots, k^n$ die Teilwürfel mit sämtlich kleineren Koordinaten als I_m einen kleineren Index als m haben). Für jeden dieser Teilwürfel ist dann das Bild der gesuchten Hochhebung an der linken unteren Ecke bekannt – für $m = 1$ ist dies $\tilde{x}_0$, und für $m > 1$ ist es bestimmt durch die Hochhebungen der vorherigen Würfel.



In jedem Schritt existiert also nach dem am Anfang betrachteten Fall eine eindeutige Hochhebung von f auf I_m mit dem vorgegebenen Anfangspunkt. Aus demselben Grund stimmt diese Hochhebung auf den Schnittmengen von I_m mit den vorherigen Würfeln überein, da diese Schnittmengen selbst Würfel (kleinerer Dimension) sind, die ganz in einer offenen Teilmenge von X liegen, über denen p eine triviale Überlagerung ist. Insgesamt erhalten wir mit Aufgabe 2.8 (b) also eine eindeutige stetige Hochhebung $\tilde{f}$ von f auf I^n. □ 11

Folgerung 8.12 (Hochhebung von Wegen)**.** *Es seien $p \colon (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung und $\alpha \colon (I, 0) \to (X, x_0)$ ein Weg in X mit Startpunkt x_0. Dann gilt:*

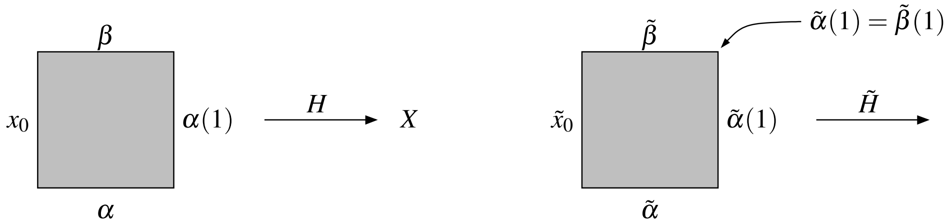
(a) *Es gibt genau eine Hochhebung* $\tilde{\alpha}\colon (I,0) \to (\tilde{X},\tilde{x}_0)$ *von* α *bezüglich* p.

(b) *Ist* $\beta\colon (I,0) \to (X,x_0)$ *ein weiterer Weg mit* $\alpha(1) = \beta(1)$ *und* $\alpha \simeq \beta \operatorname{rel}\{0,1\}$*, so gilt auch* $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ *und* $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta} \operatorname{rel}\{0,1\}$.

Beweis.

(a) ist genau die Aussage von Satz 8.11 für $n = 1$.

(b) Es sei $H\colon (I \times I, 0) \to (X,x_0)$ eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ zwischen α und β. Die Bilder von H auf dem Rand des Einheitsquadrats sind im folgenden Bild links dargestellt.



Nach Satz 8.11 für $n = 2$ gibt es nun eine eindeutige Hochhebung $\tilde{H}\colon (I \times I, 0) \to (\tilde{X},\tilde{x}_0)$ von H. Wegen der Eindeutigkeit von Hochhebungen auf Intervallen kennen wir wie im Bild oben rechts auch die Bilder von $\tilde{H}$ auf dem Rand des Einheitsquadrats: An der linken Kante müssen wir (als Hochhebung der konstanten Abbildung x_0) die konstante Abbildung $\tilde{x}_0$ haben, und damit an der oberen Kante (als Hochhebung von β mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$) den Weg $\tilde{\beta}$. Analog ist die untere Kante der Weg $\tilde{\alpha}$, und die rechte damit der konstante Weg $\tilde{\alpha}(1)$.

Also ist $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ und $\tilde{H}$ eine Homotopie zwischen $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ relativ $\{0,1\}$. □

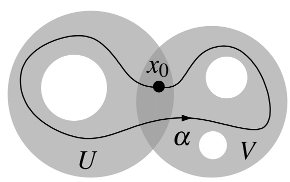
Bemerkung 8.13. Folgerung 8.12 bedeutet insbesondere, dass im Fall einer Überlagerung die Abbildung $p_*\colon \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0) \to \pi_1(X,x_0)$ aus Konstruktion 7.12 injektiv ist: Ist $[p \circ \tilde{\alpha}] = [p \circ \tilde{\beta}]$ in $\pi_1(X,x_0)$ für gewisse $\tilde{\alpha},\tilde{\beta} \in \Gamma(\tilde{X},\tilde{x}_0)$, also $p \circ \tilde{\alpha} \simeq p \circ \tilde{\beta} \operatorname{rel}\{0,1\}$, so gilt nach Folgerung 8.12 (b) auch $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta} \operatorname{rel}\{0,1\}$ (und damit $[\tilde{\alpha}] = [\tilde{\beta}]$ in $\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$), da $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ natürlich die Hochhebungen von $p \circ \tilde{\alpha}$ bzw. $p \circ \tilde{\beta}$ sind.

Aufgabe 8.14. Es seien U und V offene Teilmengen eines topologischen Raumes X mit $U \cup V = X$. Ferner sei $U \cap V$ wegzusammenhängend und $x_0 \in U \cap V$. Man zeige:

(a) Zu jedem geschlossenen Weg $\alpha \in \Gamma(X,x_0)$ gibt es geschlossene Wege $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \Gamma(X,x_0)$, die alle komplett in U oder komplett in V liegen, so dass $[\alpha] = [\alpha_1] \bullet \cdots \bullet [\alpha_n] \in \pi_1(X,x_0)$ gilt. (Hinweis: Das Lemma 8.10 von Lebesgue ist hierfür nützlich.)

(b) Ist $\pi_1(U,x_0) = \pi_1(V,x_0) = \{1\}$, so ist auch $\pi_1(X,x_0) = \{1\}$.

(c) $\pi_1(S^n) = \{1\}$ für alle $n \geq 2$.



$X = U \cup V$

Dies ist ein einfacher erster Fall des Satzes von Seifert und van Kampen (siehe Satz 9.8 und Beispiel 9.10).

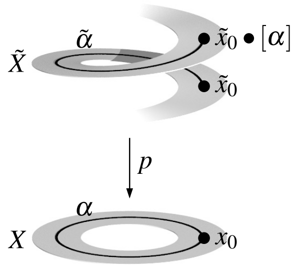
Die eindeutige Hochhebung von Wegen ermöglicht nun die folgende Konstruktion:

Konstruktion 8.15 (Fasertransport)**.** Es sei $p\colon (\tilde{X},\tilde{x}_0) \to (X,x_0)$ eine Überlagerung.

(a) Nach Folgerung 8.12 gibt es eine wohldefinierte Abbildung

$$\pi_1(X,x_0) \to p^{-1}(\{x_0\}),\ [\alpha] \mapsto \tilde{\alpha}(1) =: \tilde{x}_0 \bullet [\alpha],$$

die wir den **Fasertransport** zu p nennen. Zu jeder Homotopieklasse eines geschlossenen Weges α in X bei x_0 ist $\tilde{x}_0 \bullet [\alpha]$ also wie im Bild rechts der Endpunkt in $\tilde{X}$, den man erhält, wenn man an $\tilde{x}_0$ die eindeutige Hochhebung $\tilde{\alpha}$ von α ansetzt.



(b) Ist p die Quotientenabbildung einer frei diskontinuierlichen Operation einer Gruppe G auf $\tilde{X}$ wie in Lemma 8.4, so ist die Abbildung $G \to p^{-1}(\{x_0\})$, $g \mapsto g \cdot \tilde{x}_0$ bijektiv. Verketten wir den Fasertransport aus (a) mit dem Inversen dieser Bijektion, erhalten wir also eine Abbildung

$$h\colon \pi_1(X,x_0) \to G \quad \text{definiert durch} \quad \tilde{x}_0 \bullet [\alpha] = h([\alpha]) \cdot \tilde{x}_0 \quad \text{für alle } \alpha \in \Gamma(X,x_0).$$

Wir werden im Folgenden auch diese Abbildung als Fasertransport bezeichnen, da sie sich von (a) nur dadurch unterscheidet, dass wir die Faser $p^{-1}(\{x_0\})$ mit G identifiziert haben.

Wir können nun unser Hauptergebnis zur Berechnung von Fundamentalgruppen beweisen.

Satz 8.16 (Fundamentalgruppen aus Überlagerungen)**.** *Es seien G eine Gruppe, die frei diskontinuierlich auf einem topologischen Raum $\tilde{X}$ operiert, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, und $p\colon (\tilde{X},\tilde{x}_0) \to (X,x_0)$ mit $X = \tilde{X}/G$ und $x_0 = p(\tilde{x}_0)$ die zugehörige Quotientenabbildung. Dann gilt für die Fasertransportabbildung $h\colon \pi_1(X,x_0) \to G$ aus Konstruktion 8.15 (b):*

(a) *Die Abbildung h ist ein Gruppenhomomorphismus;*

(b) $\operatorname{Im} h = \{g \in G : \tilde{x}_0$ *und* $g \cdot \tilde{x}_0$ *liegen in derselben Wegzusammenhangskomponente*$\}$;

(c) $\operatorname{Ker} h = p_* \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$.

Ist insbesondere $\tilde{X}$ einfach zusammenhängend, so ist die Abbildung h also ein Isomorphismus, und damit $\pi_1(X,x_0) \cong G$.

Beweis.

(a) Beachte zunächst, dass

(i) $\tilde{x}_0 \bullet ([\alpha] \bullet [\beta]) = (\tilde{x}_0 \bullet [\alpha]) \bullet [\beta]$, da beide Seiten gleich dem Endpunkt in $\tilde{X}$ sind, wenn man an $\tilde{x}_0$ zunächst die Hochhebung von $[\alpha]$ und daran dann die von $[\beta]$ ansetzt.

(ii) $(g \cdot \tilde{x}_0) \bullet [\alpha] = g \cdot (\tilde{x}_0 \bullet [\alpha])$, denn ist $\tilde{\alpha}$ die Hochhebung von $\alpha \in \Gamma(X,x_0)$ mit $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$, so ist $t \mapsto g \cdot \tilde{\alpha}(t)$ die Hochhebung von α mit Anfangspunkt $g \cdot \tilde{\alpha}(0) = g \cdot \tilde{x}_0$. Deren Endpunkt $(g \cdot \tilde{x}_0) \bullet [\alpha]$ ist aber $g \cdot \tilde{\alpha}(1) = g \cdot (\tilde{x}_0 \bullet [\alpha])$.

Damit folgt nun

$$\begin{aligned} h([\alpha] \bullet [\beta]) \cdot \tilde{x}_0 &= \tilde{x}_0 \bullet ([\alpha] \bullet [\beta]) \overset{\text{(i)}}{=} (\tilde{x}_0 \bullet [\alpha]) \bullet [\beta] = (h([\alpha]) \cdot \tilde{x}_0) \bullet [\beta] \overset{\text{(ii)}}{=} h([\alpha]) \cdot (\tilde{x}_0 \bullet [\beta]) \\ &= h([\alpha]) \cdot h([\beta]) \cdot \tilde{x}_0, \end{aligned}$$

also wie behauptet $h([\alpha] \bullet [\beta]) = h([\alpha]) \cdot h([\beta])$.

(b) „$\subset$“: Ist $g \in G$ mit $g = h([\alpha])$ für einen Weg α, also $g \cdot \tilde{x}_0 = \tilde{x}_0 \bullet [\alpha]$, so verbindet die Hochhebung von α die Punkte $\tilde{x}_0$ und $g \cdot \tilde{x}_0$ miteinander.

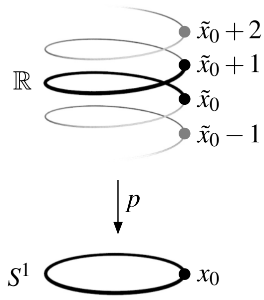
„$\supset$“: Es sei nun umgekehrt $\tilde{\alpha}$ ein Weg in $\tilde{X}$ von $\tilde{x}_0$ nach $g \cdot \tilde{x}_0$. Dann ist $\tilde{\alpha}$ die Hochhebung des geschlossenen Weges $\alpha := p \circ \tilde{\alpha}$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$. Also ist $g \cdot \tilde{x}_0 = \tilde{x}_0 \bullet [\alpha]$ und damit $h([\alpha]) = g$.

(c) „$\subset$“: Es sei $\alpha \in \Gamma(X,x_0)$ mit $h([\alpha]) = e$, also $\tilde{x}_0 = \tilde{x}_0 \bullet [\alpha]$. Die Hochhebung $\tilde{\alpha}$ von α mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$ ist damit ein geschlossener Weg und definiert ein Element $[\tilde{\alpha}] \in \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ mit $[\alpha] = [p \circ \tilde{\alpha}] = p_*[\tilde{\alpha}] \in p_* \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$.

„$\supset$“: Eine Homotopieklasse in $p_* \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ hat die Form $[p \circ \tilde{\alpha}]$ für einen geschlossenen Weg $\tilde{\alpha} \in \Gamma(\tilde{X},\tilde{x}_0)$. Da $\tilde{\alpha}$ dann die Hochhebung von $p \circ \tilde{\alpha}$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$ ist, gilt $h([p \circ \tilde{\alpha}]) \cdot \tilde{x}_0 = \tilde{x}_0 \bullet [p \circ \tilde{\alpha}] = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_0$ und damit $h([p \circ \tilde{\alpha}]) = e$. $\square$

Beispiel 8.17.

(a) Nach Beispiel 8.6 (a) operiert $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}$ durch Addition frei diskontinuierlich mit $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$. Da $\mathbb{R}$ einfach zusammenhängend ist, folgt aus Satz 8.16 also wie erwartet $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.



Der Satz zeigt auch, dass ein konkreter Isomorphismus $h\colon \pi_1(S^1, x_0) \to \mathbb{Z}$ durch den Fasertransport gegeben ist: Für einen geschlossenen Weg $\alpha \in \Gamma(S^1, x_0)$ ist $h([\alpha])$ die ganze Zahl n mit $\tilde{x}_0 \bullet [\alpha] = n + \tilde{x}_0$, d. h. so dass die Hochhebung von α nach $\mathbb{R}$ mit Anfangspunkt $\tilde{x}_0$ im Punkt $n + \tilde{x}_0$ endet – im Bild rechts also $n = 1$. Da diese Zahl offensichtlich angibt, wie oft α um die Kreislinie S^1 herum läuft, nennt man sie auch die *Umlaufzahl* von α.

Für den konkret im Bild eingezeichneten Weg, der einmal um die Kreislinie herum läuft, bedeutet dies also, dass er nicht homotop relativ $\{0,1\}$ zu einem konstanten Weg ist, da seine Umlaufzahl 1 ist und nicht 0. Dies ist äquivalent dazu, dass die Identität id_{S^1} nicht homotop relativ $\{1\}$ zur konstanten Abbildung 1 ist (siehe Bemerkung 7.5 (b)), und damit nach Aufgabe 6.4 auch im nicht-relativen Sinne nicht homotop zu einer konstanten Abbildung.

Wir haben hiermit nun also zum ersten Mal formal beweisen können, dass zwei Abbildungen nicht homotop sind, bzw. dass die Fundamentalgruppe eines Raumes nicht-trivial ist, und der Raum damit also weder einfach zusammenhängend noch kontrahierbar ist (siehe Beispiel 7.15 (a)). Dasselbe gilt nach Satz 7.14 dann natürlich auch für jeden zur Kreislinie homotopieäquivalenten Raum, etwa für $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ oder den Kreisring in der Einleitung dieses Kapitels.

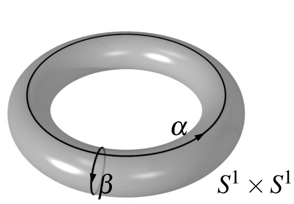
(b) Die Fundamentalgruppe des Torus $S^1 \times S^1$ aus Beispiel 5.9 (c) ist nach Aufgabe 7.7

$$\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Alternativ erhalten wir dies auch direkt aus Satz 8.16 mit der Darstellung

$$S^1 \times S^1 \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong (\mathbb{R} \times \mathbb{R})/(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}),$$

da $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ durch Addition frei diskontinuierlich auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ operiert und $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ einfach zusammenhängend ist. Die beiden Erzeuger der Fundamentalgruppe, also $(1,0)$ und $(0,1)$ in der Darstellung als $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, sind genau die Schleifen entlang einer der beiden Faktoren $S^1 \times S^1$, also die Homotopieklassen der im Bild rechts eingezeichneten Wege α und β.



(c) Die reelle projektive Ebene lässt sich nach Beispiel 8.6 (c) gemäß $\mathbb{P}^2 \cong S^2/\mathbb{Z}_2$ als Quotient einer frei diskontinuierlichen Gruppenoperation schreiben. Da S^2 nach Aufgabe 8.14 (c) einfach zusammenhängend ist, ist die Fundamentalgruppe von $\mathbb{P}^2$ nach Satz 8.16 also $\pi_1(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}_2$. Entsprechend unserer Interpretation durch den Fasertransport wird das nicht-triviale Element dieser Fundamentalgruppe durch einen geschlossenen Weg in $\mathbb{P}^2$ repräsentiert, dessen Hochhebung zwei identifizierte Punkte im Quotienten $S^2/\mathbb{Z}^2$, also zwei gegenüber liegende Punkte in S^2 miteinander verbindet – so wie der in der Einleitung von Kapitel 6 beschriebene Weg in $\mathbb{P}^2$.

Beispiel 8.18 ($\mathbb{R}^2 \not\cong \mathbb{R}^n$ für $n > 2$)**.** In Ergänzung zu Beispiel 2.17 (b) und 3.9 (a) können wir nun auch zeigen, dass $\mathbb{R}^2$ nicht zu $\mathbb{R}^n$ mit $n > 2$ homöomorph ist: Wäre $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ ein solcher Homöomorphismus, so auch die Einschränkung $f|_{\mathbb{R}^2\backslash\{0\}}\colon \mathbb{R}^2\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^n\backslash\{f(0)\}$. Nach Beispiel 6.12 (b) sind aber S^1 und S^{n-1} Deformationsretrakte von $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ bzw. $\mathbb{R}^n\backslash\{f(0)\}$, und damit wären S^1 und S^{n-1} dann homotopieäquivalent – im Widerspruch zu Satz 7.14 (b), da $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_1(S^{n-1}) = \{1\}$ nach Beispiel 8.17 (a) und Aufgabe 8.14 (c) gilt.

Aufgabe 8.19 (Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche)**.** Für $(a_1,a_2) \in \mathbb{Z}^2$ und $(b_1,b_2) \in \mathbb{R}^2$ setzen wir

$$(a_1,a_2) * (b_1,b_2) := (a_1 + (-1)^{a_2}\, b_1, a_2 + b_2) \quad \in \mathbb{R}^2.$$

Man prüft sofort nach, dass $(\mathbb{Z}^2, *)$ eine (nicht-abelsche) Gruppe ist. Sie heißt *semidirektes Produkt* von $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Z}$ und wird mit $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ bezeichnet. Man zeige:

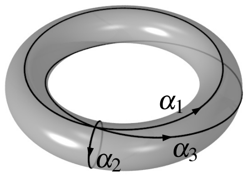
(a) $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ operiert durch $*$ auf $\mathbb{R}^2$, und diese Operation ist frei diskontinuierlich.

(b) Der Quotientenraum $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z})$ ist homöomorph zur Kleinschen Flasche.

Nach Satz 8.16 ist die Fundamentalgruppe der Kleinschen Flasche damit also isomorph zu $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$.

Aufgabe 8.20. Im Torus $X = (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ seien wie im Bild die drei geschlossenen Wege

$$\alpha_1 \colon I \to X,\ t \mapsto \overline{(t,0)},$$
$$\alpha_2 \colon I \to X,\ t \mapsto \overline{(0,t)},$$
$$\alpha_3 \colon I \to X,\ t \mapsto \overline{(t,t)}$$



gegeben.

(a) Finde für $i = 1,2,3$ jeweils eine Überlagerung $p_i \colon \tilde{X}_i \to X$ vom Grad 2, so dass die Hochhebung von α_i wieder geschlossen ist, die Hochhebung der beiden anderen Wege aber nicht.

(b) Schreibe diese Überlagerungen explizit als Restklassenabbildung einer geeigneten frei diskontinuierlichen Gruppenoperation auf $\tilde{X}_i$. 12

Bemerkung 8.21. Ist der Raum $\tilde{X}$ in der Situation von Satz 8.16 zwar wegzusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend, so ist der Morphismus $h \colon \pi_1(X,x_0) \to G$ des Fasertransports nach diesem Satz zwar noch surjektiv, aber in der Regel nicht mehr injektiv. Sein Kern $p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ ist (da p_* nach Bemerkung 8.13 injektiv ist) isomorph zu $\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$, und wir erhalten aus dem Homomorphiesatz [G1, Satz 6.17] angewendet auf h den Isomorphismus

$$\pi_1(X,x_0)/p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0) \cong G.$$

Betrachten wir z. B. noch einmal die Situation aus Beispiel 8.6 (b), in der $\mathbb{Z}_n$ auf $\tilde{X} = S^1$ durch Multiplikation mit n-ten Einheitswurzeln operiert, und der Quotient $X = \tilde{X}/G$ wiederum homöomorph zu S^1 ist: In diesem Fall sind $\pi_1(X,x_0)$ und $\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ beide isomorph zu $\mathbb{Z}$, und p_* bildet den Erzeuger von $\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$, also die geschlossene Schleife in $\tilde{X}$ mit Umlaufzahl 1, auf eine Schleife in X mit Umlaufzahl n ab. Die Untergruppe $p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ von $\pi_1(X,x_0) \cong \mathbb{Z}$ ist also $n\mathbb{Z}$, und wir erhalten korrekterweise

$$\pi_1(X,x_0)/p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n \cong G.$$

Bemerkung 8.22 (S^n ist nicht kontrahierbar)**.** Wir haben in Beispiel 8.17 (a) gesehen, dass die Identität auf S^1 nicht homotop zu einer konstanten Abbildung ist, also dass S^1 damit nach Bemerkung 6.9 (a) nicht kontrahierbar ist.

In der Tat gilt diese Aussage für alle Sphären S^n mit $n \in \mathbb{N}_{>0}$ – und sie ist dort auch genauso anschaulich wie im Fall der Kreislinie S^1. Allerdings lässt sich dieser allgemeine Fall mit unseren bisher entwickelten Methoden nicht beweisen, da die Fundamentalgruppe von S^n für $n > 1$ nach Aufgabe 8.14 (c) trivial ist. Man benötigt für einen Beweis dieser Aussage Methoden der algebraischen Topologie, die über den Rahmen dieser Vorlesung weit hinaus gehen.

Gar nicht mehr anschaulich ist hingegen, dass die entsprechende Aussage in unendlicher Dimension falsch ist:

Aufgabe 8.23. Es sei V der (unendlich-dimensionale) Vektorraum aller beschränkten reellen Zahlenfolgen. Wir betrachten ihn als normierten Raum mit der Supremumsnorm

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Man zeige, dass in diesem Raum die Einheitssphäre

$$\{(x_n) \in V : \|(x_n)_n\| = 1\}$$

kontrahierbar ist.

(Hinweis: Die Abbildung $f\colon V \to V,\ (x_0,x_1,x_2,\dots,) \mapsto (0,x_0,x_1,\dots)$ ist hierfür nützlich.)

Bemerkung 8.24 (Universelle Überlagerungen)**.** Um Satz 8.16 zur Berechnung der Fundamentalgruppe eines gegebenen topologischen Raumes X verwenden zu können, benötigen wir einen einfach zusammenhängenden Raum $\tilde{X}$ zusammen mit einer frei diskontinuierlichen Operation einer Gruppe G, so dass $\tilde{X}/G \cong X$. Es stellt sich also die Frage, ob wir solche $\tilde{X}$ und G in jedem Fall finden können.

In der Tat funktioniert dies für „hinreichend schöne" topologische Räume X immer. Die Idee hierfür ist, zu einem gegebenen punktierten topologischen Raum (X,x_0) die Menge

$$\tilde{X} := \{\alpha\colon (I,0) \to (X,x_0)\}/ \simeq \operatorname{rel}\{0,1\}$$

aller Homotopieklassen von (nicht notwendig geschlossenen) Wegen in X mit Anfangspunkt x_0 zu betrachten, zusammen mit der Abbildung $p\colon \tilde{X} \to X,\ [\alpha] \mapsto \alpha(1)$. Weiterhin operiert die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ offensichtlich auf $\tilde{X}$ durch das Zusammensetzen von Wegen, also durch

$$\pi_1(X,x_0) \times \tilde{X} \to \tilde{X},\ ([\beta],[\alpha]) \mapsto [\beta] \bullet [\alpha].$$

Man kann $\tilde{X}$ nun so zu einem einfach zusammenhängenden topologischen Raum machen, dass die Operation von $\pi_1(X,x_0)$ auf $\tilde{X}$ frei diskontinuierlich, und der Quotientenraum $\tilde{X}/\pi_1(X,x_0)$ homöomorph zu X mit Quotientenabbildung p wird [J, Kapitel 9.7]. Die so entstehende Überlagerung $p\colon \tilde{X} \to X$ heißt *universelle Überlagerung* von X.

Die Überprüfung aller für diese Aussage notwendigen Dinge ist recht langwierig, aber nicht weiter schwierig. Wir wollen den kompletten Beweis hier nicht vorführen, da er zwar die prinzipielle Möglichkeit der Bestimmung von Fundamentalgruppen mit Hilfe von Überlagerungen zeigt, aber keine konkrete Berechnungsmöglichkeit dafür liefert – hierfür ist man darauf angewiesen, die dafür nötige Darstellung $\tilde{X}/G \cong X$ wie oben auf eine andere Art zu ermitteln.