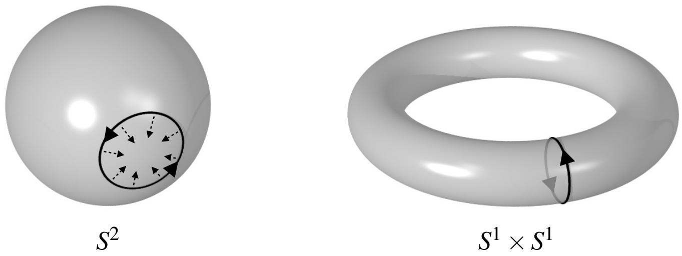
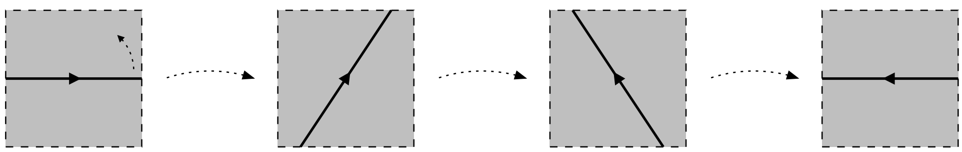
6. Homotopie

Wir haben im letzten Kapitel durch das Verkleben mit Hilfe der Quotiententopologie viele neue Möglichkeiten kennen gelernt, mit denen man weitere topologische Räume konstruieren kann. Bisher haben wir aber nur relativ wenige Kriterien behandelt, mit denen man diese Räume dann auch unterscheiden kann. So ist es z. B. sehr anschaulich, dass z. B. die Kugeloberfläche S^2 und der Torus $S^1 \times S^1$ wie im Bild unten nicht homöomorph sind, da der Torus im Gegensatz zu S^2 in der Mitte ein „Loch" hat. Wie aber begründet man das formal? Keines unserer bisherigen Kriterien zur Unterscheidung topologischer Räume ist hier anwendbar, da sowohl S^2 als auch $S^1 \times S^1$ kompakte und normale Hausdorff-Räume sind, die sowohl zusammenhängend als auch wegzusammenhängend sind.



Wir benötigen hierzu ein neues topologisches Konzept, die sogenannte *Homotopie*. Die Idee hierbei ist prinzipiell, Deformationen von Objekten in einem topologischen Raum X zu studieren. Betrachten wir z. B. geschlossene Schleifen in X, so stellen wir zunächst anschaulich fest, dass solche Schleifen im Fall $X = S^2$ (wie im Bild oben links durch die gepunkteten Pfeile angedeutet) immer auf einen Punkt zusammenziehbar sind, während dies für $X = S^1 \times S^1$ bei der oben rechts eingezeichneten Schleife nicht möglich ist (einen exakten Beweis dieser Aussage werden wir später noch in Aufgabe 8.14 (c) und Beispiel 8.17 (b) sehen). Dies ist der Grund dafür, dass S^2 und $S^1 \times S^1$ topologisch verschieden sind.

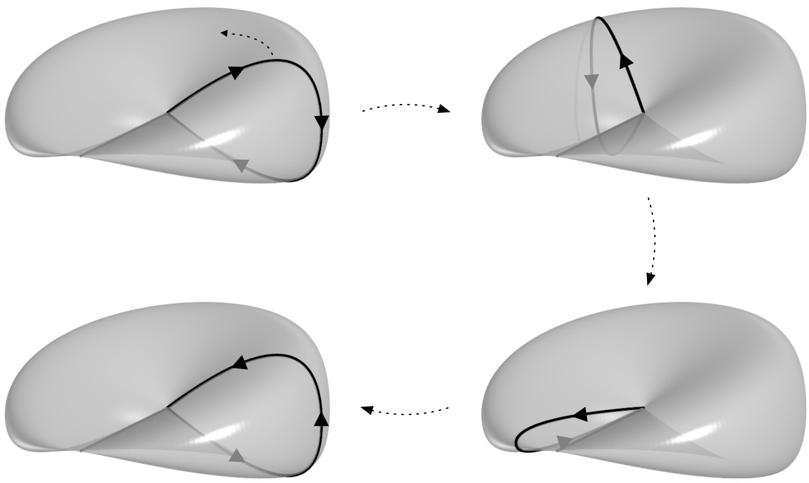
In der reellen projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ aus Beispiel 5.9 (c) bzw. Konstruktion 5.24 verhalten sich Schleifen sogar noch etwas anders. Dazu erinnern wir uns daran, dass dieser Raum als Quotient $X = I^2/\sim$ konstruiert werden kann, wobei die Relation $\sim$ gegenüberliegende Punkte auf dem Rand des Einheitsquadrats I^2 miteinander identifiziert. Der Weg im folgenden Bild links stellt also eine geschlossene Schleife in X dar, da sein Endpunkt rechts mit dem Anfangspunkt links identifiziert wird.



Wir können diesen Weg nun offensichtlich so in X deformieren, dass wir ihn (wie im Bild durch die gepunkteten Pfeile angedeutet) in I^2 drehen – wobei wir natürlich darauf achten müssen, dass Anfangs- und Endpunkt des Weges in I^2 immer gegenüberliegend bleiben, damit sie in X miteinander identifiziert werden, d. h. die Schleife bei der Deformation geschlossen bleibt. Nach einer halben Drehung erhalten wir dann die gleiche Schleife wie am Anfang, nur mit umgekehrter Orientierung. Auch hier ist es anschaulich klar, dass wir diese Schleife jedoch nicht auf einen Punkt zusammenziehen können, da wir sie nicht vom Rand des Einheitsquadrats wegbewegen können.

In $\mathbb{P}^2$ haben wir also eine Schleife gefunden, die nicht auf einen Punkt zusammenziehbar ist, die sich aber in die entgegengesetzt orientierte Schleife deformieren lässt. Dies ist weder bei der Kugeloberfläche S^2 der Fall (wo ja jede Schleife zusammenziehbar ist) noch beim Torus $S^1 \times S^1$ (wo sich eine nicht zusammenziehbare Schleife wie im Bild des Torus oben zwar um den Torus herum bewegen lässt, sie dadurch allerdings nicht ihre Orientierung ändert). Also ist die reelle projektive Ebene topologisch sowohl von S^2 als auch von $S^1 \times S^1$ verschieden.

Im dreidimensionalen Bild der reellen projektiven Ebene wie in Beispiel 5.9 (c) sieht die Bewegung dieser Schleife übrigens wie folgt aus – an der Stelle der Selbstdurchdringung wird der obere Teil der Schleife zum unteren und umgekehrt, so dass sich effektiv die Orientierung der Schleife ändert:



Wir sehen also, dass derartige Homotopieargumente sehr nützlich sind, um topologische Räume voneinander zu unterscheiden. Gleichzeitig stellt dieser Punkt auch den Anfang der sogenannten *algebraischen Topologie* dar (während wir uns bisher nur mit der *mengentheoretischen Topologie* beschäftigt haben). Wir werden nämlich in Definition 7.4 sehen, dass wir in einem topologischen Raum die Menge der Schleifen modulo Deformationen zu einer Gruppe – der sogenannten *Fundamentalgruppe* – machen und somit topologische Räume mit algebraischen Methoden untersuchen können. Die Tatsache, dass sich in S^2 jede Schleife zu einem Punkt zusammenziehen lässt, übersetzt sich dann einfach in die Aussage, dass die Fundamentalgruppe von S^2 die triviale Gruppe ist (während dies bei $S^1 \times S^1$ und $\mathbb{P}^2$ nicht der Fall ist), und die Existenz einer nicht zusammenziehbaren Schleife in $\mathbb{P}^2$, die sich in die umgekehrt orientierte Schleife deformieren lässt, bedeutet gerade, dass die Fundamentalgruppe von $\mathbb{P}^2$ ein selbstinverses Element (außer dem neutralen) besitzt. In der Tat werden wir sehen, dass die Fundamentalgruppen des Torus und der reellen projektiven Ebene $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z}_2$ sind (siehe Beispiel 8.17).

Natürlich waren unsere bisherigen Begründungen aber alle nur anschaulicher Art und müssen nun noch formal exakt gemacht werden. Leider ist dies mit deutlich mehr Aufwand verbunden, als man vielleicht denken (und hoffen) würde. Wir werden daher in diesem Kapitel im Wesentlichen damit beschäftigt sein, das Konzept der Homotopie überhaupt erst einmal exakt einzuführen und ein paar erste Eigenschaften davon zu zeigen.

Definition 6.1 (Homotopie)**.** Es seien $f, g \colon X \to Y$ zwei stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen und $A \subset X$ eine Teilmenge mit $f|_A = g|_A$.

Wir sagen, dass f **homotop** zu g relativ A ist (in Zeichen: $f \simeq g \operatorname{rel} A$), wenn es eine stetige Abbildung $H\colon X \times I \to Y$ gibt mit

$$\begin{aligned} H(x,0) &= f(x) && \text{für alle } x \in X; \\ H(x,1) &= g(x) && \text{für alle } x \in X; \\ H(x,t) &= f(x) = g(x) && \text{für alle } x \in A \text{ und } t \in I. \end{aligned}$$

Man bezeichnet H dann auch als **Homotopie** zwischen f und g relativ A.

Ist $A = \emptyset$, so sagt man in diesem Fall einfach, dass f homotop zu g ist, und schreibt dies als $f \simeq g$.

Bemerkung 6.2. Anschaulich bedeutet die Bedingung aus Definition 6.1 offensichtlich, dass sich f unter Festhaltung der Punkte in A stetig nach g deformieren lässt. In der Homotopie H kann man sich die zweite Variable t als Deformationsparameter vorstellen: Betrachtet man für festes $t \in I$ die Abbildung $H_t\colon X \to Y$, $x \mapsto H(x,t)$, so erhält man für $t = 0$ und $t = 1$ gerade $H_0 = f$ bzw. $H_1 = g$, während die anderen H_t zwischen diesen beiden Abbildungen stetig interpolieren. Dies wird besonders in den folgenden Beispielen deutlich.

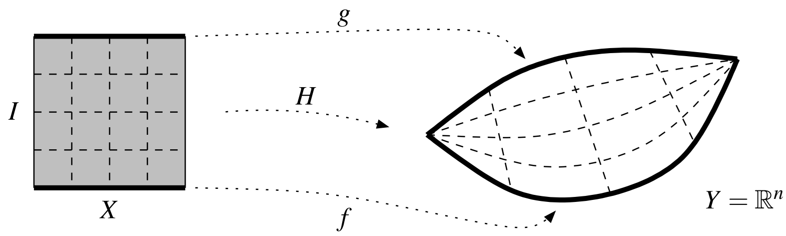
Beispiel 6.3.

(a) Es seien $X = P$ ein Punkt (also der topologische Raum, der aus nur einem Punkt besteht) und $A = \emptyset$. Die beiden Abbildungen $f,g\colon P \to Y$ sind dann also gerade durch ihre Bildpunkte $f(P)$ und $g(P)$ in Y gegeben. Eine Homotopie $H\colon P \times I \to Y$ kann somit als Abbildung $H\colon I \to Y$ mit $H(0) = f(P)$ und $H(1) = g(P)$ aufgefasst werden und ist damit nichts weiter als ein Weg von $f(P)$ nach $g(P)$ in Y im Sinne von Definition 3.1 (a) (parametrisiert durch das Einheitsintervall I). Damit ist Y genau dann wegzusammenhängend, wenn je zwei Abbildungen $f,g\colon P \to Y$ homotop zueinander sind. In diesem Sinne ist das Konzept des Wegzusammenhangs also ein einfacher Spezialfall von Homotopie.

(b) Es sei $Y = \mathbb{R}^n$. Weiterhin seien X ein beliebiger topologischer Raum und $f,g\colon X \to Y$ zwei stetige Abbildungen, die auf einer Teilmenge $A \subset X$ übereinstimmen. Dann sind f und g stets homotop relativ A mit der Homotopie

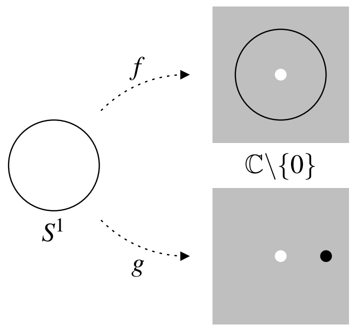
$$H\colon X \times I \to Y,\ (x,t) \mapsto (1-t)\, f(x) + t\, g(x),$$

die jeden Punkt $f(x)$ für t von 0 bis 1 auf einer geraden Linie mit $g(x)$ verbindet. Das Bild unten zeigt dies für den Fall $X = I$ und $A = \{0,1\}$, so dass f und g also zwei Wege in Y mit gleichem Anfangs- und Endpunkt sind. Die Homotopie H ist gleich f bzw. g auf der unteren bzw. oberen Kante von $X \times I$ (d. h. für $t = 0$ bzw. $t = 1$), während die übrigen horizontalen Intervalle in $X \times I$ (für konstantes $t \in I$) auf die deformierten Zwischenwege abgebildet werden. Auf der linken bzw. rechten Kante ist H konstant gleich $f(0) = g(0)$ bzw. $f(1) = g(1)$, da es sich um eine Homotopie relativ $\{0,1\}$ handelt. Die übrigen senkrechten Intervalle in $X \times I$ (für konstantes $x \in X$) werden von H auf gerade Linien abgebildet, die $f(x)$ mit $g(x)$ verbinden.



Dieselbe Folgerung ergibt sich offensichtlich auch, wenn $Y \subset \mathbb{R}^n$ eine *konvexe Menge* ist – also eine Teilmenge, die mit je zwei Punkten auch ihre ganze Verbindungsstrecke dazwischen enthält.

(c) Zwischen den Räumen $X = S^1 \subset \mathbb{C}$ und $Y = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ betrachten wir wie im Bild rechts die beiden Abbildungen $f\colon X \to Y$, $x \mapsto x$ und $g\colon X \to Y$, $x \mapsto 1$. Es ist anschaulich einleuchtend, dass man die Schleife f um den Nullpunkt nicht auf den Punkt g deformieren kann, ohne sie dabei über den Nullpunkt zu ziehen (der ja nicht in Y enthalten ist). Die Abbildungen f und g sollten also nicht homotop zueinander sein.



In der Tat ist dies auch nicht der Fall. Einen Beweis hierfür können wir jedoch erst in Kapitel 8 mit Hilfe von Überlagerungen geben (siehe Beispiel 8.17 (a)).

Wenn ihr allerdings schon die Vorlesung „Einführung in die Funktionentheorie" gehört habt, kennt ihr bereits einen Beweis – wenn wir Wege und Homotopien mit *stetig differenzierbaren* statt mit *stetigen* Abbildungen definiert hätten. In der Funktionentheorie zeigt man nämlich, dass sich geschlossene Wegintegrale über holomorphe Funktionen nicht ändern, wenn man den Integrationsweg im Holomorphiegebiet der Funktion deformiert [G3, Folgerung 5.3]. Speziell für die auf $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ holomorphe Funktion $z \mapsto \frac{1}{z}$ sind die Wegintegrale über die Kreislinie f und den konstanten Weg g aber verschieden, nämlich $2\pi i$ bzw. 0, so dass diese beiden Wege also nicht homotop zueinander sein können [G3, Beispiel 5.4 (a)].

Der Beweis auf diese Art benutzt allerdings einerseits stetig differenzierbare statt stetige Homotopien, und andererseits den Cauchyschen Integralsatz aus der Funktionentheorie (der seinerseits nicht ganz einfach zu beweisen ist). Beides wollen wir hier in der Topologie natürlich nicht voraussetzen.

Aufgabe 6.4. Es seien X ein topologischer Raum, $a \in S^1$ und $f\colon S^1 \to X$ eine stetige Abbildung. Beweise, dass dann die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist homotop relativ $\{a\}$ zu einer konstanten Abbildung.

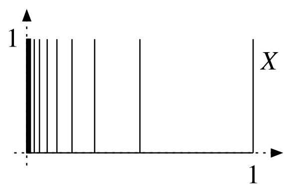
(b) f ist homotop zu einer konstanten Abbildung.

(c) f lässt sich zu einer stetigen Abbildung $\tilde{f}\colon D^2 \to X$ fortsetzen.

Aufgabe 6.5. In Aufgabe 6.4 haben wir für Abbildungen $S^1 \to X$ gezeigt, dass die Bedingung der Homotopie zu einer konstanten Abbildung unabhängig davon ist, ob wir sie relativ zu einem Punkt betrachten oder nicht. Wir wollen nun sehen, dass die analoge Aussage für Abbildungen mit beliebigem Startraum im Allgemeinen falsch ist.

Es sei dazu

$$X = (I \times \{0\}) \cup \left(\left(\{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \right) \times I \right) \quad \subset \mathbb{R}^2$$



der rechts dargestellte „Kamm". Zeige, dass id_X dann homotop zu einer konstanten Abbildung ist, aber nicht homotop relativ $\{(0,1)\}$.

Nach diesen Beispielen beginnen wir nun mit der Untersuchung des Homotopiebegriffs.

Lemma 6.6 (Eigenschaften der Homotopie)**.** *Es seien X und Y topologische Räume sowie $A \subset X$. Dann gilt:*

(a) *Die Homotopie relativ A ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller stetigen Abbildungen von X nach Y (mit vorgegebener Einschränkung auf A).*

(b) *Homotopie ist in folgendem Sinne verträglich mit Verkettungen: Sind $f,g\colon X \to Y$ zwei stetige Abbildungen mit $f \simeq g \operatorname{rel} A$ und $f',g'\colon Y \to Z$ zwei stetige Abbildungen in einen weiteren topologischen Raum Z mit $f' \simeq g' \operatorname{rel} f(A)$, so gilt auch $f' \circ f \simeq g' \circ g \operatorname{rel} A$.*

Beweis.

(a) Wir müssen zeigen, dass die Relation $\simeq$ rel A reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

- Reflexivität: Jede stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ ist zu sich selbst homotop relativ A mit der konstanten Homotopie $H(x,t) = f(x)$.
- Symmetrie: Ist f homotop zu g relativ A mit der Homotopie $H\colon X \times I \to Y$, so ist auch g homotop zu f relativ A mit der Homotopie $H'(x,t) = H(x,1-t)$, die die Deformation H einfach in umgekehrter Richtung durchläuft.
- Transitivität: Sind f homotop zu g relativ A mit der Homotopie $H\colon X \times I \to Y$ sowie g homotop zu h relativ A mit der Homotopie $H'\colon X \times I \to Y$, so ist auch f homotop zu h relativ A mit der zusammengesetzten Homotopie

$$H''\colon X \times I \to Y,\ (x,t) \mapsto \begin{cases} H(x,2t) & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ H'(x,2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

die mit der doppelten Geschwindigkeit zuerst f nach g und dann g nach h deformiert (beachte, dass H'' nach Aufgabe 2.8 (b) auch wirklich stetig ist).

(b) Sind $H\colon X \times I \to Y$ eine Homotopie von f nach g relativ A und $H'\colon Y \times I \to Z$ eine Homotopie von f' nach g' relativ $f(A)$, so ist

$$H''\colon X \times I \to Z,\ (x,t) \mapsto H'(H(x,t),t)$$

eine Homotopie von $f' \circ f$ nach $g' \circ g$ relativ A: Offensichtlich ist dies eine stetige Abbildung zwischen den behaupteten Räumen, und es gilt

$$\begin{aligned} H''(x,0) &= f'(f(x)) && \text{für alle } x \in X, \\ H''(x,1) &= g'(g(x)) && \text{für alle } x \in X, \\ H''(x,t) &= f'(f(x)) = g'(g(x)) && \text{für alle } x \in A \text{ und } t \in I. \end{aligned}$$

□

Die Verträglichkeit der Homotopierelation mit Verkettungen können wir benutzen, um von Abbildungen zu sprechen, die „bis auf Homotopie umkehrbar" sind. Dies führt zum folgenden wichtigen Begriff der Homotopieäquivalenz.

Definition 6.7 (Homotopieäquivalenz)**.** Es seien X und Y topologische Räume.

(a) Eine stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt **Homotopieäquivalenz**, wenn es eine stetige Abbildung $g\colon Y \to X$ gibt mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$. In diesem Fall heißt g **homotopieinvers** zu f.

(b) X und Y heißen **homotopieäquivalent** (manchmal auch geschrieben als $X \simeq Y$), wenn es eine Homotopieäquivalenz zwischen ihnen gibt.

(c) X heißt **kontrahierbar** oder **zusammenziehbar**, wenn X homotopieäquivalent zum einpunktigen Raum ist. 08

Bemerkung 6.8.

(a) Auch die Homotopieäquivalenz topologischer Räume erfüllt die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation: Sie ist nach Definition symmetrisch, und außerdem reflexiv, da id_X eine Homotopieäquivalenz von X nach X ist. Für die Transitivität seien $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinversem $g\colon Y \to X$ sowie $f'\colon Y \to Z$ eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinversem $g'\colon Z \to Y$. Dann ist auch $f' \circ f\colon X \to Z$ eine Homotopieäquivalenz mit Homotopieinversem $g \circ g'\colon Z \to X$, denn es gilt

$$(g \circ g') \circ (f' \circ f) = g \circ (g' \circ f') \circ f \overset{(*)}{\simeq} g \circ \mathrm{id}_Y \circ f = g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$$

und analog $(f' \circ f) \circ (g \circ g') \simeq \mathrm{id}_Z$, wobei wir in $(*)$ Lemma 6.6 (b) verwendet haben.

(b) Offensichtlich ist jeder Homöomorphismus eine Homotopieäquivalenz. Auch anschaulich kann man sich sowohl die Homöomorphie als auch die Homotopieäquivalenz zweier Räume so vorstellen, dass sich der eine in den anderen deformieren lässt, ohne dabei „etwas auseinanderzureißen oder zusammenzukleben". Die wesentliche Abschwächung bei der Homotopieäquivalenz besteht darin, dass die dafür benötigten zueinander „inversen" Abbildungen nun nicht mehr bijektiv sein müssen, also z. B. auch „Klumpen ohne Löcher" zu einem einzigen Punkt zusammengedrückt werden können. Genau wie bei der Homöomorphie sollte es daher mit ein bisschen Übung für zwei gegebene Räume, von denen man eine anschauliche Vorstellung hat, möglich sein, durch „einfaches Hinschauen" zu entscheiden, ob sie zueinander homotopieäquivalent sind oder nicht. Die folgenden Beispiele und Konzepte sollten helfen, eine derartige Intuition aufzubauen.

Bemerkung 6.9 (Kontrahierbare Räume)**.** Es sei P der einpunktige topologische Raum.

(a) Nach Definition ist ein topologischer Raum X genau dann kontrahierbar, wenn es stetige Abbildungen $f\colon X \to P$ und $g\colon P \to X$ gibt mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_P$. Hierbei ist die letzte Bedingung natürlich trivial, da eine beliebige Abbildung von P nach P immer die Identität ist. Außerdem ist f notwendigerweise eine konstante Abbildung, so dass auch $g \circ f$ eine konstante Abbildung (mit Bildpunkt $g(P)$) ist. Wir sehen also, dass X *genau dann kontrahierbar ist, wenn die Identität* id_X *auf* X *homotop zu einer konstanten Abbildung ist.* An dieser äquivalenten Formulierung erkennt man anschaulich besonders gut, was Kontrahierbarkeit bedeutet: dass sich der Raum durch stetige Deformation auf einen Punkt zusammenziehen lässt.

(b) Ist X kontrahierbar, so sind zwei stetige Abbildungen $f,g\colon Y \to X$ von einem weiteren topologischen Raum nach X immer homotop zueinander: Nach (a) ist dann nämlich id_X homotop zu einer konstanten Abbildung $c\colon X \to X$. Damit folgt

$$f = \mathrm{id}_X \circ f \overset{6.6\,(b)}{\simeq} c \circ f = c \circ g \overset{6.6\,(b)}{\simeq} \mathrm{id}_X \circ g = g.$$

Wenden wir dies auf den Fall $Y = P$ an, so sehen wir also gemäß Beispiel 6.3 (a), dass jeder kontrahierbare Raum wegzusammenhängend ist – was ja auch anschaulich klar sein sollte, da sich mehrere Komponenten ohne Zusammenkleben nicht zu einem Punkt verbinden lassen.

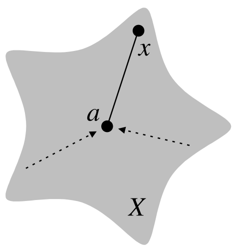
(c) Sind X und Y beide kontrahierbar, so ist nach (b) insbesondere *jede* stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz, denn für ein beliebiges $g\colon Y \to X$ gilt dann ja $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$.

Beispiel 6.10.

(a) Eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R}^n$ wie im Bild rechts heißt **sternförmig**, wenn es einen Punkt $a \in X$ gibt, so dass für alle $x \in X$ die komplette Verbindungsstrecke von a nach x in X liegt. In diesem Fall ist

$$H\colon X \times I \to X,\ (x,t) \mapsto (1-t)x + t\,a$$

eine Homotopie von der Identität id_X zur konstanten Abbildung a (die jeden Punkt auf einer geraden Linie nach a bewegt). Damit sind sternförmige Mengen nach Bemerkung 6.9 (a) also stets kontrahierbar.



(b) Setzen wir noch einmal unser anschauliches und noch nicht bewiesenes Ergebnis aus Beispiel 6.3 (c) voraus, dass die Abbildungen $f\colon S^1 \to \mathbb{C}\backslash\{0\},\ x \mapsto x$ und $g\colon S^1 \to \mathbb{C}\backslash\{0\},\ x \mapsto 1$ nicht homotop sind, so bedeutet dies nach Bemerkung 6.9 (b) gerade, dass $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ nicht kontrahierbar sein kann.

Ein oft auftretender Fall von Homotopieäquivalenzen ist der, in dem einer der Räume ein Teilraum des anderen und die Homotopieäquivalenz gerade die Einbettungsabbildung ist. Diese Situation ist meistens anschaulich gut zu erkennen und hat einen besonderen Namen.

Definition 6.11 (Deformationsretrakte)**.** Es sei A eine Teilmenge eines topologischen Raumes X. Wir bezeichnen die Einbettungsabbildung mit $i\colon A \to X,\ x \mapsto x$.

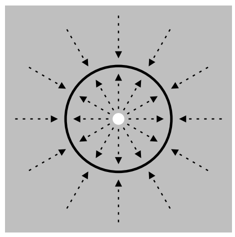
Eine stetige Abbildung $f\colon X \to A$ mit $f|_A = \mathrm{id}_A$ (also $f \circ i = \mathrm{id}_A$) und $i \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ heißt **Deformationsretraktion**. Im Fall der Existenz einer solchen Abbildung heißt A ein **Deformationsretrakt** von X.

Offensichtlich ist jede Deformationsretraktion eine Homotopieäquivalenz. Ein Deformationsretrakt ist also stets homotopieäquivalent zu dem Raum, in dem er liegt.

Beispiel 6.12.

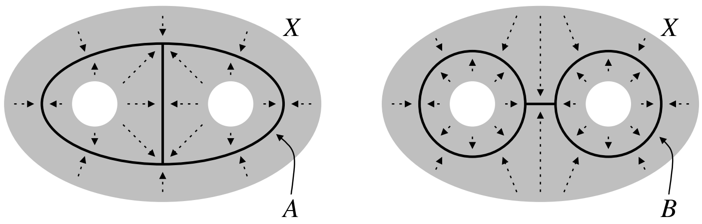
(a) In einer sternförmigen Menge X wie in Beispiel 6.10 (a) ist der „Mittelpunkt“ $A = \{a\}$ ein Deformationsretrakt von X: Die konstante Abbildung $f\colon X \to A$ erfüllt natürlich $f|_A = \mathrm{id}_A$, und wie im obigen Beispiel gesehen ist die Abbildung $i \circ f\colon X \to X,\ x \mapsto a$ homotop zur Identität id_X.

(b) Die Kreislinie $A = S^1$ ist ein Deformationsretrakt von $X = \mathbb{C}\backslash\{0\}$: Die unten rechts im Bild dargestellte stetige Abbildung
$$f\colon \mathbb{C}\backslash\{0\} \to S^1,\ z \mapsto \frac{z}{|z|},$$
die jeden Punkt radial auf den Einheitskreis projiziert, ist eine Deformationsretraktion, denn es ist natürlich $f|_{S^1} = \mathrm{id}_{S^1}$, und die Abbildung
$$H\colon X \times I \to X,\ (z,t) \mapsto (1-t)z + t\,\frac{z}{|z|},$$
die jeden Punkt $z \neq 0$ auf einer geraden Linie auf seinen Bildpunkt $f(z)$ schiebt, ist eine Homotopie zwischen id_X und der Abbildung $i \circ f\colon X \to X,\ z \mapsto f(z)$. Das Bild kann man also auch so interpretieren, dass die gestrichelten Pfeile die Homotopie darstellen.



Auf die gleiche Art sieht man, dass die Sphäre S^{n-1} für alle $n > 1$ ein Deformationsretrakt von $\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ ist.

(c) Es seien A und B die aus den durchgezogenen Linien im Bild unten bestehenden „eindimensionalen“ Teilräume von $\mathbb{R}^2$, die jeweils zwei Schleifen besitzen. Natürlich sind A und B nicht homöomorph, da B durch Herausnahme des Mittelpunktes in zwei Wegzusammenhangskomponenten zerfällt, während A beim Herausnehmen eines beliebigen Punktes wegzusammenhängend bleibt (siehe Beispiel 3.9).



Die Räume sind aber homotopieäquivalent, da sie beide – wie die gestrichelten Pfeile analog zu (b) zeigen – Deformationsretrakte desselben Raumes X und somit homotopieäquivalent zu X sind.

Aufgabe 6.13. Zeige, dass die folgenden drei topologischen Räume homotopieäquivalent sind:

(a) die Kreislinie S^1;

(b) das Möbiusband;

(c) der Raum $X = \{A \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) : \det A > 0\}$.

(Hinweis zu (c): Untersuche die Abbildung $f\colon X \to S^1$, die einer Matrix ihre normierte erste Spalte zuordnet.)

Aufgabe 6.14. Zu einer stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ sei $M_f = (X \times I) \cup_g Y$ mit der Abbildung $g\colon X \times \{1\} \to Y,\ (x,1) \mapsto f(x)$. Man nennt M_f den *Abbildungszylinder* von f.

(a) Zeichne ein Bild von M_f für die Fälle der Inklusionsabbildung $f\colon S^1 \to \mathbb{C}$ und der Abbildung $f\colon S^1 \to S^1,\ z \mapsto z^2$.

(b) Zeige, dass sich jede stetige Abbildung $f\colon X \to Y$ als Verkettung von zwei stetigen Abbildungen $X \xrightarrow{g} M_f \xrightarrow{h} Y$ schreiben lässt, wobei g eine Einbettung (also eine injektive Abbildung, die ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist) und h eine Homotopieäquivalenz ist.