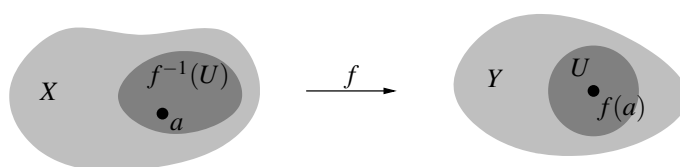


## 2. Stetige Abbildungen

Nachdem wir im letzten Kapitel topologische Räume eingeführt haben, wollen wir nun Abbildungen zwischen solchen Räumen untersuchen. Wie schon in der Einleitung erwähnt sind in der Topologie vor allem die *stetigen* Abbildungen wichtig – in der Tat war die Definition eines topologischen Raumes ja gerade so motiviert, dass man damit das Konzept von stetigen Abbildungen formulieren kann. Zur Definition stetiger Abbildungen verwenden wir die folgende Bedingung, die sich in der Sprache der topologischen Räume formulieren lässt und von der wir bereits wissen, dass sie in metrischen Räumen zur  $\varepsilon$ - $\delta$ -Stetigkeit äquivalent ist [G2, Lemma 24.16]:

**Definition 2.1** (Stetigkeit). Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen topologischen Räumen.

- (a)  $f$  heißt **stetig** in einem Punkt  $a \in X$ , wenn zu jeder Umgebung  $U$  von  $f(a)$  in  $Y$  das Urbild  $f^{-1}(U)$  eine Umgebung von  $a$  in  $X$  ist.
- (b)  $f$  heißt **stetig**, wenn  $f$  in jedem Punkt  $a \in X$  stetig ist.



**Bemerkung 2.2.**

- (a) In der Tat genügt es für die Stetigkeit von  $f$  in  $a$ , die Bedingung aus Definition 2.1 (a) für jede *offene* Umgebung  $U$ , bzw. im Fall einer durch eine Basis gegebenen Topologie für jede *basis-offene* Umgebung von  $f(a)$  nachzuprüfen: Ist  $V$  dann nämlich eine beliebige Umgebung von  $f(a)$ , so enthält diese nach Definition 1.19 (a) bzw. Bemerkung 1.20 eine (basis-)offene Umgebung  $U$  von  $f(a)$ . Wissen wir nun, dass  $f^{-1}(U)$  dann eine Umgebung von  $a$  ist, so ist  $f^{-1}(V) \supset f^{-1}(U)$  damit natürlich erst recht eine Umgebung von  $a$ .
- (b) Ein Konzept der *gleichmäßigen Stetigkeit* wie in [G2, Definition 8.34 (b) und Definition 24.24 (a)] lässt sich für Abbildungen zwischen allgemeinen topologischen Räumen nicht definieren, da es keine Möglichkeit gibt, Umgebungen von verschiedenen Punkten „größenmäßig miteinander zu vergleichen“.

**Bemerkung 2.3** (Stetigkeit in metrischen Räumen [G2, Lemma 24.16]). Sind  $X$  und  $Y$  metrische Räume, so ist die Definition 2.1 (a) der Stetigkeit einer Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  in einem Punkt  $a \in X$  wie oben schon erwähnt äquivalent zum gewohnten  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium [G2, Lemma 24.16]. Der Vollständigkeit halber sei hier noch einmal ein Beweis dafür gegeben: Zunächst einmal sieht man mit dem gleichen Argument wie in Bemerkung 2.2, dass es genügt, die Bedingung aus Definition 2.1 (a) für  $\varepsilon$ -Kugeln  $U_\varepsilon(f(a))$  um  $f(a)$  zu zeigen. Die Bedingung besagt dann aber gerade, dass das Urbild  $f^{-1}(U_\varepsilon(f(a)))$  eine Umgebung von  $a$  ist, also äquivalent dazu eine  $\delta$ -Umgebung  $U_\delta(a)$  von  $a$  enthält. Mit anderen Worten ist die Bedingung genau

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} : U_\delta(a) \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(a))),$$

was genau das  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium ist.

Möchte man von einer Abbildung nicht unbedingt genau wissen, in welchen Punkten sie stetig ist und in welchen nicht, sondern nur, ob sie in *allen* Punkten stetig ist, so gibt es hierfür ein Kriterium, das oft viel einfacher anzuwenden ist als Definition 2.1. Auch dieses Kriterium, das wir im folgenden Satz beweisen wollen, ist euch vermutlich zumindest zum Teil schon für den Fall von Abbildungen zwischen metrischen Räumen aus den Grundlagen der Mathematik bekannt [G2, Satz 24.17].

**Satz 2.4** (Kriterien für Stetigkeit). *Für eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a)  $f$  ist stetig.
- (b) Für alle offenen Teilmengen  $U \subset Y$  ist  $f^{-1}(U)$  offen in  $X$   
(„Urbilder offener Mengen sind offen“).
- (c) Für alle Basen  $\mathcal{B}$  der Topologie auf  $Y$  gilt: Für alle  $U \in \mathcal{B}$  ist  $f^{-1}(U)$  offen in  $X$   
(„Urbilder basis-offener Mengen sind offen“).
- (d) Es gibt eine Basis  $\mathcal{B}$  der Topologie auf  $Y$ , für die gilt: Für alle  $U \in \mathcal{B}$  ist  $f^{-1}(U)$  offen in  $X$ .
- (e) Für alle abgeschlossenen Teilmengen  $A \subset Y$  ist  $f^{-1}(A)$  abgeschlossen in  $X$   
(„Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen“).

*Beweis.* „(a)  $\Rightarrow$  (b)“: Es seien  $f$  stetig,  $U \subset Y$  offen und  $a \in f^{-1}(U)$ , also  $f(a) \in U$ . Dann ist  $U$  eine Umgebung von  $f(a)$ , und damit ist  $f^{-1}(U)$  nach Definition 2.1 (a) eine Umgebung von  $a$ . Es gibt also eine offene Menge  $V_a$  in  $X$  mit  $a \in V_a \subset f^{-1}(U)$ . Vereinigen wir nun diese Mengen  $V_a$  für alle  $a \in f^{-1}(U)$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &\subset \bigcup_{a \in f^{-1}(U)} V_a \quad (\text{denn } a \in V_a \text{ für alle } a \in f^{-1}(U)) \\ &\subset f^{-1}(U) \quad (\text{wegen } V_a \subset f^{-1}(U)). \end{aligned}$$

Also gilt hier die Gleichheit, und  $f^{-1}(U)$  ist als Vereinigung offener Mengen offen.

„(b)  $\Rightarrow$  (c)“ ist trivial, da basis-offene Mengen immer auch offen sind.

„(c)  $\Rightarrow$  (d)“ ist ebenfalls trivial (wähle z. B. für  $\mathcal{B}$  die Basis aller offenen Mengen).

„(d)  $\Rightarrow$  (a)“: Es seien  $a \in X$  beliebig und  $U$  eine Umgebung von  $f(a)$  in  $Y$ . Dann gibt es nach Bemerkung 1.20 eine basis-offene Menge  $V$  in  $Y$  mit  $f(a) \in V \subset U$ . Da Urbilder basis-offener Mengen unter  $f$  nach (d) offen sind, ist  $f^{-1}(V)$  nun offen in  $X$ . Wegen  $a \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(U)$  ist  $f^{-1}(U)$  damit eine Umgebung von  $a$  in  $X$ . Also ist  $f$  stetig in  $a$ .

„(b)  $\Leftrightarrow$  (e)“: Dies ergibt sich sofort durch Übergang zum Komplement, da

$$f^{-1}(Y \setminus U) = X \setminus f^{-1}(U)$$

für jede (offene) Teilmenge  $U$  von  $Y$  gilt. □

**Beispiel 2.5.** Aufgrund von Bemerkung 2.3 übertragen sich natürlich alle Beispiele und Gegenbeispiele für stetige Abbildungen zwischen metrischen Räumen, die ihr aus den „Grundlagen der Mathematik“ kennt, sofort auf unsere neue Definition. Hier sind noch ein paar weitere Beispiele:

- (a) Eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen bleibt stetig, wenn man die Topologie auf  $X$  feiner oder die auf  $Y$  gröber macht – denn dann ist die neue Stetigkeitsbedingung aus Satz 2.4 (b) ja schwächer als die alte.

Im Extremfall, wenn  $X$  die diskrete (also feinstmögliche) oder  $Y$  die indiskrete (also gröbstmögliche) Topologie hat, ist sogar jede Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  stetig, da die Bedingung aus Satz 2.4 (b) dann immer erfüllt ist.

- (b) Eine konstante Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen beliebigen topologischen Räumen ist immer stetig, denn Urbilder beliebiger Teilmengen von  $Y$  können nur  $\emptyset$  und  $X$  sein und sind damit nach Definition 1.1 (a) offen.
- (c) Es sei  $Y$  eine Teilmenge eines topologischen Raumes  $X$ . Wie üblich fassen wir  $Y$  mit der Teilraumtopologie aus Konstruktion 1.7 selbst wieder als topologischen Raum auf. Wir betrachten die Inklusionsabbildung

$$i: Y \rightarrow X, a \mapsto a.$$

Ist  $U \subset X$  offen, so ist natürlich  $i^{-1}(U) = Y \cap U$ , und diese Menge ist nach Definition der Teilraumtopologie offen in  $Y$ . Also ist  $i$  nach Satz 2.4 „(b)  $\Rightarrow$  (a)“ stetig. In der Tat sind *genau* die Mengen dieser Form offen in  $Y$  – was man auch so formulieren kann, dass die Teilraumtopologie die *größte* Topologie auf  $Y$  ist, für die die Inklusionsabbildung  $i: Y \rightarrow X$  stetig ist.

- (d) Sind  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow Z$  stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen, so ist auch die Verkettung  $g \circ f: X \rightarrow Z$  stetig – dies ergibt sich z. B. sofort aus dem Stetigkeitskriterium aus Satz 2.4 (b).

**Aufgabe 2.6.** Es sei  $\mathcal{T}$  die Topologie zur Postamtmetrik auf  $\mathbb{R}^2$  aus Beispiel 1.5 (a).

- (a) Zeige, dass für  $x \in \mathbb{R}^2$  die einpunktige Menge  $\{x\}$  genau dann offen bzgl.  $\mathcal{T}$  ist, wenn  $x \neq 0$  ist.  
 (b) Bestimme eine möglichst einfache Basis der Topologie  $\mathcal{T}$ .  
 (c) In welchen Punkten ist die Abbildung  $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ ,  $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + 1, x_2)$  stetig?

**Aufgabe 2.7** (Andere Stetigkeitsbegriffe aus der Analysis). Es seien  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $a \in \mathbb{R}$ .

- (a) Die Funktion  $f$  heißt in  $a$  *rechtsseitig stetig*, wenn  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \geq a}} f(x) = f(a)$  gilt.

Zeige, dass diese Bedingung äquivalent ist zur Stetigkeit in  $a$  als Abbildung  $f: (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $\mathcal{T}$  die Sorgenfrey-Topologie ist und der Zielraum die Standardtopologie hat.

- (b) Die Funktion  $f$  heißt in  $a$  *halbstetig von oben*, wenn

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0} \exists \delta \in \mathbb{R}_{>0} \forall x \in \mathbb{R}: |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) - f(a) < \varepsilon.$$

Konstruiere eine Topologie  $\mathcal{T}$  auf  $\mathbb{R}$ , so dass diese Bedingung äquivalent ist zur Stetigkeit in  $a$  als Abbildung  $f: \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ , wobei der Startraum die Standardtopologie hat.

Was bedeutet diese Bedingung anschaulich?

**Aufgabe 2.8.** Es sei  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung zwischen topologischen Räumen. Man zeige:

- (a) Sind  $U_1, \dots, U_n$  offene Mengen in  $X$  mit  $U_1 \cup \dots \cup U_n = X$  und ist  $f|_{U_i}$  stetig für alle  $i$ , so ist  $f$  stetig.  
 (b) Sind  $A_1, \dots, A_n$  abgeschlossene Mengen in  $X$  mit  $A_1 \cup \dots \cup A_n = X$  und ist  $f|_{A_i}$  stetig für alle  $i$ , so ist  $f$  stetig.

Gelten diese Aussagen auch noch für Überdeckungen von  $X$  durch unendlich viele Teilmengen?

**Aufgabe 2.9** (Stetigkeit  $\neq$  Folgenstetigkeit). In dieser Aufgabe wollen wir sehen, dass man die Stetigkeit von Abbildungen zwischen topologischen Räumen im Allgemeinen *nicht* mit Hilfe von Folgen überprüfen kann – im Gegensatz zum Fall von metrischen Räumen [G2, Bemerkung 24.5 (b)]. Aus diesem Grund spielen Folgen in der Topologie auch eine viel geringere Rolle als in der Analysis. (Man bräuchte hier stattdessen die Begriffe von sogenannten *Netzen* oder *Filtern*, die man sich als geeignet verallgemeinerte Folgenbegriffe vorstellen kann – wir wollen darauf in dieser Vorlesung jedoch nicht weiter eingehen.)

- (a) Man zeige: In der Komplement-abzählbar-Topologie aus Beispiel 1.5 (c) konvergiert eine Folge  $(x_n)_n$  in  $X$  genau dann gegen ein  $a \in X$ , wenn  $x_n = a$  für fast alle  $n$  gilt. (Wie ist eigentlich Folgenkonvergenz in einem topologischen Raum definiert?)  
 (b) Gib ein Beispiel für eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen an, die in einem Punkt  $a \in X$  zwar das Folgenkriterium

$$\text{für jede Folge } (x_n)_n \text{ in } X \text{ mit } x_n \rightarrow a \text{ gilt } f(x_n) \rightarrow f(a)$$

erfüllt, die aber dennoch *nicht* stetig in  $a$  ist.

Warum genau kann der für metrische Räume bekannte Beweis des Folgenkriteriums für Stetigkeit nicht auf beliebige topologische Räume verallgemeinert werden?

Ein weiteres interessantes und wichtiges Beispiel zu stetigen Abbildungen ergibt sich bei der Untersuchung der Produkttopologie aus Konstruktion 1.16. Es ist die direkte Übertragung der aus den „Grundlagen der Mathematik“ bekannten Aussage, dass die Stetigkeit einer Abbildung von einem metrischen Raum nach  $\mathbb{R}^n$  komponentenweise im Zielraum überprüft werden kann [G2, Lemma 24.7]. Wir formulieren es hier als eigenes Lemma.

**Lemma 2.10** (Stetige Abbildungen in Produkte). *Es seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume sowie  $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$  und  $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$  die Projektionsabbildungen. Dann gilt:*

- (a)  $\pi_X$  und  $\pi_Y$  sind stetig.
- (b) Eine Abbildung  $f: Z \rightarrow X \times Y$  von einem topologischen Raum  $Z$  in das Produkt  $X \times Y$  ist genau dann stetig, wenn die beiden Komponentenabbildungen  $f_X := \pi_X \circ f: Z \rightarrow X$  und  $f_Y := \pi_Y \circ f: Z \rightarrow Y$  stetig sind.

*Beweis.*

- (a) Ist  $U \subset X$  offen, so ist das Urbild  $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$  nach Definition der Produkttopologie offen in  $X \times Y$ . Also ist  $\pi_X$  (und analog auch  $\pi_Y$ ) stetig nach Satz 2.4 (b).
- (b) „ $\Rightarrow$ “: Ist  $f$  stetig, so sind nach (a) natürlich auch  $f_X$  und  $f_Y$  als Verkettungen stetiger Abbildungen stetig (siehe Beispiel 2.5 (d)).

„ $\Leftarrow$ “: Es seien  $f_X$  und  $f_Y$  stetig. Nach Satz 2.4 „(d)  $\Rightarrow$  (a)“ genügt es zu zeigen, dass Urbilder unter  $f$  von Mengen der Form  $U \times V$  für offene Mengen  $U \subset X$  und  $V \subset Y$  wieder offen sind. In der Tat ist nun

$$\begin{aligned} f^{-1}(U \times V) &= \{z \in Z : f(z) \in U \times V\} = \{z \in Z : f_X(z) \in U \text{ und } f_Y(z) \in V\} \\ &= f_X^{-1}(U) \cap f_Y^{-1}(V) \end{aligned}$$

nach Satz 2.4 (b) offen, da  $f_X$  und  $f_Y$  als stetig vorausgesetzt wurden.  $\square$

**Bemerkung 2.11** (Initialtopologien). Man kann leicht überprüfen, dass die Eigenschaft aus Lemma 2.10 (b) die Produkttopologie eindeutig charakterisiert, d. h. dass die Produkttopologie die einzige Topologie auf  $X \times Y$  ist, mit der diese Aussage richtig ist. Man nennt dies daher die *universelle Eigenschaft der Produkttopologie*. Analog rechnet man leicht nach, dass die Produkttopologie die größte Topologie auf  $X \times Y$  ist, bezüglich der die Aussage aus Lemma 2.10 (a) gilt.

In der Tat ist dies ein spezieller Fall einer sogenannten *Initialtopologie*: Hat man eine Familie topologischer Räume  $(X_i)_{i \in J}$ , eine Menge  $Y$  und Abbildungen  $\pi_i: Y \rightarrow X_i$  für alle  $i \in J$  gegeben, so definieren diese Daten eine sogenannte Initialtopologie auf  $Y$  als die die größte Topologie auf  $Y$ , bezüglich der alle  $\pi_i$  stetig sind, oder alternativ als die eindeutig bestimmte Topologie auf  $Y$ , so dass eine Abbildung  $f: Z \rightarrow Y$  von einem beliebigen topologischen Raum  $Z$  genau dann stetig ist, wenn alle Verkettungen  $\pi_i \circ f: Z \rightarrow X_i$  es sind.

Ein weiteres Beispiel einer Initialtopologie, das wir bereits gesehen haben, ist die Teilraumtopologie (siehe Beispiel 2.5 (c)). In diesem Fall gibt es nur eine Abbildung  $\pi: Y \rightarrow X$ , nämlich die Inklusion einer Teilmenge  $Y$  in einem topologischen Raum  $X$ .

Wir werden diese allgemeinen Initialtopologien in dieser Vorlesung aber nicht weiter untersuchen. Es gibt übrigens auch eine entsprechende „duale“ Version mit „umgekehrten Pfeilrichtungen“, die sogenannten Finaltopologien (siehe Bemerkung 5.7).

**Beispiel 2.12** (Summen und Produkte stetiger Abbildungen nach  $\mathbb{R}$ ). Es seien  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  zwei stetige Abbildungen von einem beliebigen topologischen Raum  $X$  in die reellen Zahlen mit der Standardtopologie. Dann sind auch

$$f + g: X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad f \cdot g: X \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

stetig: Die Abbildung  $X \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (f(x), g(x))$  ist stetig nach Lemma 2.10 (b), und die beiden Abbildungen  $f + g$  und  $f \cdot g$  ergeben sich daraus durch Verkettung mit den bekanntlich stetigen Abbildungen  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$  bzw.  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ .

Wir werden dies im Folgenden oft benutzen, ohne jedes Mal explizit darauf hinzuweisen.

Von besonderer Bedeutung sind die Abbildungen, die nicht nur stetig sind, sondern auch noch eine stetige Umkehrabbildung besitzen. Sie haben einen besonderen (und nicht besonders schönen) Namen:

**Definition 2.13** (Homöomorphismen). Es seien  $X$  und  $Y$  topologische Räume.

- (a) Eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  heißt **Homöomorphismus**, wenn sie stetig und bijektiv ist, und die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  ebenfalls stetig ist.
- (b) Die Räume  $X$  und  $Y$  heißen **homöomorph** (in Zeichen:  $X \cong Y$ ), wenn es zwischen ihnen einen Homöomorphismus  $f: X \rightarrow Y$  gibt.

02

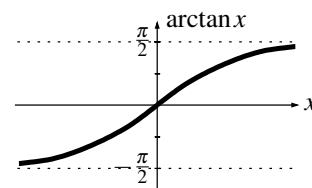
**Bemerkung 2.14.**

- (a) Nach dem Stetigkeitskriterium aus Satz 2.4 (b) ist eine Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  zwischen topologischen Räumen genau dann ein Homöomorphismus, wenn sie bijektiv ist und unter  $f$  sowohl Urbilder als auch Bilder (die man ja dann als Urbilder von  $f^{-1}$  auffassen kann) offener Mengen wieder offen sind. Anders ausgedrückt ist  $f$  genau dann ein Homöomorphismus, wenn  $f$  bijektiv ist und die offenen Mengen von  $X$  und  $Y$  eins zu eins aufeinander abbildet. Da die offenen Mengen ja aber gerade das sind, was eine Topologie definiert, heißt das also, dass zwei topologische Räume genau dann homöomorph sind, wenn sie topologisch ununterscheidbar sind. Homöomorphe Räume werden daher auch oft als *topologisch isomorph* oder *topologisch äquivalent*, Homöomorphismen als *topologische Isomorphismen* bezeichnet. Sie spielen in der Topologie dieselbe Rolle wie z. B. in der Algebra die Isomorphismen von Gruppen oder Vektorräumen.
- (b) In der Definition eines Homöomorphismus ist die Bedingung, dass  $f^{-1}$  ebenfalls stetig ist, nicht überflüssig – im Gegensatz z. B. zur Theorie von Vektorräumen, wo die Umkehrabbildung eines bijektiven Homomorphismus ja stets automatisch wieder ein Homomorphismus ist. Ein sehr einfaches Beispiel hierfür ist die identische Abbildung  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ , wenn wir den Startraum mit der diskreten und den Zielraum mit der indiskreten Topologie versehen: Natürlich ist  $f$  bijektiv und nach Beispiel 2.5 (a) stetig, aber da sich die offenen Mengen im Start- und Zielraum nicht entsprechen, ist  $f$  kein Homöomorphismus.

Wir werden in Folgerung 4.14 allerdings noch ein einfaches hinreichendes Kriterium dafür kennenlernen, wann eine stetige bijektive Abbildung bereits ein Homöomorphismus ist.

**Beispiel 2.15** (Beispiele homöomorpher Räume).

- (a) Die Abbildung  $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), x \mapsto \arctan x$  wie im Bild rechts ist bekanntlich bijektiv und stetig (in der Standardtopologie), genau wie ihre Umkehrabbildung  $f^{-1}: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan x$ . Also ist  $f$  ein Homöomorphismus, d. h.  $\mathbb{R}$  ist (mit der Standardtopologie) topologisch äquivalent zum offenen Intervall  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  – und analog natürlich auch zu jedem anderen offenen Intervall.

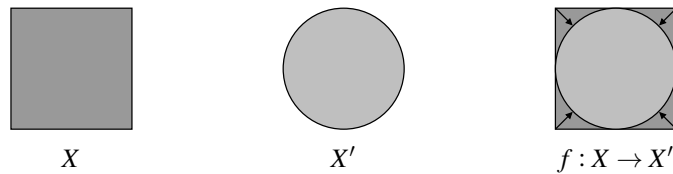


Wir schließen daraus, dass die Topologie in diesem Sinne nicht zwischen „unterschiedlich großen“ Räumen unterscheiden kann, auch nicht zwischen solchen „mit endlicher und unendlicher Ausdehnung“.

- (b) Es seien  $\|\cdot\|$  und  $\|\cdot\|'$  zwei Normen auf  $\mathbb{R}^n$  sowie

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} \quad \text{und} \quad X' = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|' \leq 1\}$$

die zugehörigen Einheitskugeln [G2, Definition 23.1]. Im Bild unten ist dies für die Maximumnorm  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$  und die euklidische Norm  $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_2$  in der Ebene dargestellt, so dass die beiden Einheitskugeln ein (abgeschlossenes) Quadrat bzw. ein (abgeschlossener) Kreis sind [G2, Beispiel 23.3].



Wir betrachten nun die Abbildung

$$f: X \rightarrow X', x \mapsto \begin{cases} \frac{\|x\|}{\|x\|'} \cdot x & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

die jeden Vektor um einen variablen Faktor streckt. Sie erfüllt offensichtlich  $\|f(x)\|' = \|x\|$  für alle  $x \in X$ . Daraus folgt sofort:

- Aus  $x \in X$ , also  $\|x\| \leq 1$ , ergibt sich auch  $\|f(x)\|' \leq 1$  und damit  $f(x) \in X'$ . Also bildet  $f$  wirklich wie behauptet  $X$  auf  $X'$  ab.
- Die Abbildung  $f$  ist stetig: Bekanntlich können wir dies mit dem  $\varepsilon$ - $\delta$ -Kriterium in einer beliebigen Norm überprüfen, da alle Normen die Standardtopologie erzeugen [G2, Bemerkung 24.5 (b)]. Insbesondere können wir im Start- und Zielraum auch unterschiedliche Normen wählen – in diesem Fall  $\|\cdot\|$  im Startraum und  $\|\cdot\|'$  im Zielraum. Dann besagt die Gleichung  $\|f(x)\|' = \|x\|$  aber gerade  $\|f(x)\|' < \varepsilon$  für alle  $x \in X$  mit  $\|x\| < \varepsilon$ , womit  $f$  in 0 stetig ist. Die Stetigkeit in den anderen Punkten folgt natürlich einfach daraus, dass Normen stetig sind [G2, Beispiel 24.3] und  $f$  dort somit aus stetigen Funktionen zusammengesetzt ist.

Da  $f$  offensichtlich bijektiv ist mit Umkehrabbildung  $f^{-1}: x \mapsto \frac{\|x\|'}{\|x\|} \cdot x$ , ist  $f^{-1}$  mit dem gleichen Argument ebenfalls stetig. Also ist  $f$  ein Homöomorphismus, die beiden Einheitskugeln  $X$  und  $X'$  sind (in der Standardtopologie) homöomorph.

Wir können dieses Ergebnis so interpretieren, dass die Topologie „keine Formen oder Ecken sieht“: Ein Quadrat ist z. B. topologisch äquivalent zu einem Kreis.

**Aufgabe 2.16.** Es seien  $D$  ein Dreieck und  $K$  ein (abgeschlossener) Kreis in  $\mathbb{R}^2$  mit der Standardtopologie. Zeige, dass  $D$  und  $K$  homöomorph sind.

**Beispiel 2.17** (Beispiele nicht-homöomorpher Räume).

- Zwischen  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{Z}$  gibt es zwar bijektive Abbildungen (da beides abzählbar unendliche Mengen sind); als Teilmengen von  $\mathbb{R}$  mit der Teilraumtopologie betrachtet sind sie jedoch nicht homöomorph, da  $\mathbb{Z}$  die diskrete Topologie besitzt und  $\mathbb{Q}$  nicht.
- Man kann zeigen, dass die Topologie „Dimensionen unterscheiden kann“: So sind z. B. die Räume  $\mathbb{R}^n$  für  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  alle topologisch verschieden, also paarweise nicht zueinander homöomorph. Dies ist jedoch schon ein schwieriges Resultat der algebraischen Topologie, von dem wir in dieser Vorlesung in den Beispielen 3.9 (a) und 8.18 nur die Spezialfälle beweisen können, dass  $\mathbb{R}^1$  und  $\mathbb{R}^2$  nicht zu den anderen  $\mathbb{R}^n$  homöomorph sind. Die Situation ist dabei deutlich komplizierter als man zunächst annehmen würde: Dass z. B.  $\mathbb{R}^1$  nicht homöomorph zu  $\mathbb{R}^2$  ist, liegt nicht etwa daran, dass  $\mathbb{R}^2$  „zu groß“ ist, um mit einer stetigen Abbildung durch  $\mathbb{R}^1$  ausgefüllt zu werden. Es gibt nämlich durchaus stetige und surjektive Abbildungen von  $\mathbb{R}^1$  nach  $\mathbb{R}^2$ , wie wir gleich in Satz 2.18 und Aufgabe 2.19 (b) sehen werden. In der Tat macht die Existenz derartig „wilder“ stetiger Abbildungen einige Beweise in der Topologie deutlich schwieriger, als man sich das wünschen würde.

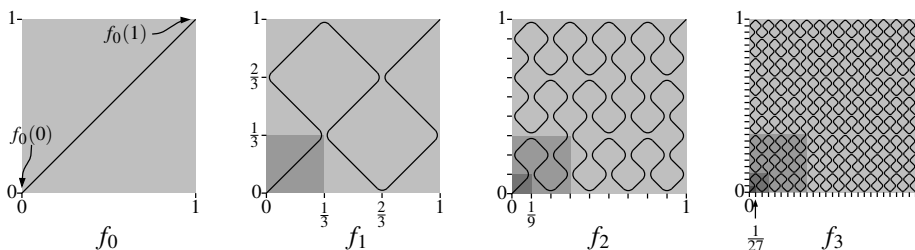
**Satz 2.18** (Peano-Kurve). *Es gibt eine stetige und surjektive Abbildung von  $I^1 = [0, 1] \subset \mathbb{R}$  nach  $I^2 = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ . Man bezeichnet eine solche Abbildung, also eine „flächenfüllende Kurve“, als Peano-Kurve.*

*Beweisskizze.* Da die Peano-Kurven für uns eigentlich nur als „abschreckendes Beispiel“ dienen, werden wir den Beweis dieses Satzes hier nur skizzieren, so dass man die Idee hinter der Konstruktion erkennen kann. Die Details zu diesem Beweis könnt ihr in [G2, Satz 24.43] finden, ein alternativer Beweis ergibt sich später mit den Methoden dieser Vorlesung in Aufgabe 4.28 (c).

Wir konstruieren die gesuchte stetige surjektive Funktion  $f: I^1 \rightarrow I^2$  als Grenzwert einer rekursiv definierten Funktionenfolge  $(f_n)$  mit  $f_n: I^1 \rightarrow I^2$ . Dabei ist  $f_0$  einfach die Gerade

$$f_0: I^1 \rightarrow I^2, t \mapsto (t, t),$$

die das Einheitsquadrat mit konstanter Geschwindigkeit von links unten nach rechts oben durchläuft. Für die nächste Funktion  $f_1$  teilen wir  $I^2$  in 9 gleich große Teilquadrate entlang der horizontalen und vertikalen Linien bei  $\frac{1}{3}$  und  $\frac{2}{3}$ , und durchlaufen nun diese 9 Teilquadrate der Reihe nach entlang ihrer Diagonalen wie im Bild unten dargestellt. Die Abbildung  $f_1$  besteht also aus 9 Geradenstücken, die alle mit gleicher Geschwindigkeit durchlaufen werden – ihr Bild unten ist an den Ecken nur deswegen abgerundet eingezeichnet, damit den Verlauf besser erkennen kann. Beachte, dass die zurückgelegte Strecke von  $f_1$  dreimal so lang ist wie bei  $f_0$  und der Weg daher mit dreifacher Geschwindigkeit durchlaufen wird.



Die nächste Abbildung  $f_2$  entsteht nun aus  $f_1$ , indem wir wie im Bild oben jedes der 9 Geradenstücke von  $f_1$  (z. B. das in dem dunkel eingezeichneten Teilquadrat) durch einen Weg ersetzen, der selbst wieder wie  $f_1$  aussieht. Entsprechend ersetzen wir dann jedes der Geradenstücke von  $f_2$  durch einen Weg wie  $f_1$ , um  $f_3$  zu erhalten. Setzen wir dieses Verfahren fort, so erhalten wir eine Folge von Abbildungen  $f_n: I^1 \rightarrow I^2$ .

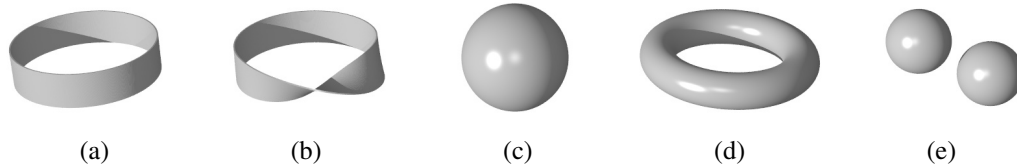
Man kann nun zeigen, dass der Grenzwert  $f(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$  für alle  $t \in I^1$  existiert und die so konstruierte Abbildung  $f: I^1 \rightarrow I^2$  stetig und surjektiv ist [G2, Satz 24.43].  $\square$

**Aufgabe 2.19.** Konstruiere eine stetige surjektive Abbildung ...

- (a) von  $I^1$  nach  $I^3$ ;
- (b) von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}^2$ .

**Bemerkung 2.20.** Da homöomorphe Räume als topologisch gleichwertig anzusehen sind, ist es eines der wichtigsten Probleme der Topologie herauszufinden, ob zwei gegebene Räume  $X$  und  $Y$  homöomorph sind oder nicht. Sind die Räume homöomorph, so wird man dies in der Regel natürlich dadurch beweisen, dass man einen Homöomorphismus  $f: X \rightarrow Y$  konkret angibt – so wie wir das in Beispiel 2.15 getan haben. Wie aber zeigt man, dass zwei Räume *nicht* homöomorph sind, also dass es *keinen* Homöomorphismus zwischen ihnen geben kann? Die Idee ist hierbei, topologische Eigenschaften zu suchen (also solche, die unter Homöomorphismen unverändert bleiben), die bei den beiden Räumen verschieden sind. Was für Eigenschaften von Räumen sind also derartige topologische Eigenschaften? Wir haben in Beispiel 2.15 schon gesehen, dass die Größe und eventuelle „Ecken“ des Raumes nicht dazu gehören.

Wir betrachten dazu einmal die unten abgebildeten fünf topologischen Räume (als Teilräume von  $\mathbb{R}^3$  mit der Standardtopologie aufgefasst). Sie sind alle als „zweidimensionale Objekte“ zu verstehen, es handelt sich also jeweils nur um die Oberfläche der betrachteten Figuren.



Diese Räume sind in der Tat alle nicht homöomorph zueinander. Auch wenn wir dies momentan noch nicht exakt beweisen können, sind die topologischen Eigenschaften, die bei diesen Räumen verschieden sind, anschaulich leicht einzusehen: Die beiden Bänder (a) und (b) haben im Gegensatz zu den anderen drei Räumen eine „Berandung“, und diese Berandung besteht beim gewöhnlichen Band (a) aus zwei unzusammenhängenden Kreislinien, während sie beim Möbiusband (b) aus nur einer Kreislinie besteht (siehe auch Beispiel 5.9 (b)). Die Vereinigung (e) von zwei Kugeln ist im Gegensatz zu den anderen Räumen unzusammenhängend, und der Torus (d) hat im Gegensatz zur Kugel (c) ein „Loch“.

Wir werden im Rest dieses Skripts noch viele derartige topologische Eigenschaften kennen lernen und auch mathematisch exakt formulieren. Im nächsten Kapitel beginnen wir dabei mit dem Begriff des Zusammenhangs, den wir gerade eben bei der Unterscheidung der im Bild oben dargestellten Räume ja auch schon verwendet haben.