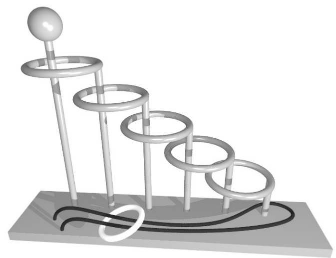
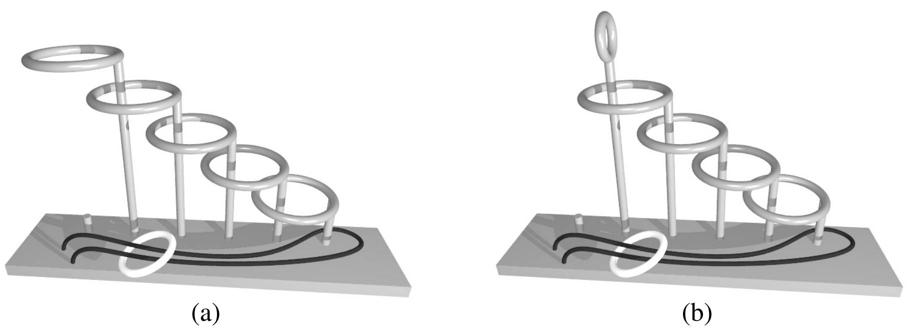
0. Einleitung und Motivation

Anschaulich ausgedrückt ist die Topologie das Teilgebiet der Mathematik, das sich mit *Deformationen* von Objekten beschäftigt – und mit Eigenschaften, die unter solchen Deformationen unverändert bleiben. So behält z. B. ein Rettungsring seine Eigenschaft, ein „Loch“ zu haben, auch dann bei, wenn man ihn verformt oder die Luft heraus lässt und ihn irgendwie zusammendrückt. Eine zusammenhängende Menge z. B. in der Ebene bleibt zusammenhängend, wenn man die Ebene beliebig deformiert. Zwei ineinander verschlungene Ringe lassen sich durch Deformationen nicht voneinander trennen. Dies alles sind topologische Aussagen – und sie zeigen, dass die Topologie von der Idee her wohl eines der anschaulichsten Gebiete der Mathematik ist.

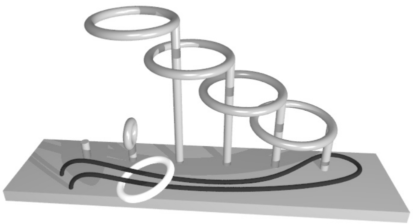
Schauen wir uns als konkretes Beispiel einmal das rechts abgebildete Puzzlespiel an. Das eigentliche Gestell (also die Platte unten und die insgesamt sechs Stangen mit der Kugel bzw. den horizontalen Ringen drauf) ist dabei aus Holz gefertigt und damit also nicht beweglich. Die schwarze Schnur ist an den Enden links auf der Platte befestigt und verläuft um die letzte der sechs Stangen herum. Ziel des Spiels ist es, diese Schnur so um die Stangen und durch die Ringe zu fädeln, dass sie letztlich „frei“ ist und man den weißen Ring unten herausnehmen kann. Wir wollen dabei annehmen, dass die Schnur lang genug ist, um alle dafür notwendigen Bewegungen zuzulassen.



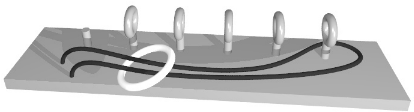
Wenn man dieses Puzzlespiel konkret in der Hand hält und damit herumspielt, erscheint es einem auf den ersten Blick sehr verwirrend und schwierig. Dabei ist aus topologischer Sicht, also wenn wir einmal Deformationen des Raumes bzw. des Holzgestells betrachten, einfach einzusehen, dass und auch wie das Puzzle lösbar sein muss: beginnen wir einmal mit der Kugel oben links. Es ist klar, dass diese Kugel keinerlei echte Funktion erfüllt und das Problem genauso einfach oder schwierig wäre, wenn die Kugel nicht da wäre, also wenn man sie immer kleiner machen würde bis sie schließlich verschwindet. Dasselbe gilt dann natürlich auch für die gesamte linke Stange, die man immer kürzer machen könnte, ohne dass sich das eigentliche Problem ändert. Das Puzzle in Abbildung (a) unten, bei dem die linke Stange fehlt, ist also praktisch äquivalent zum ursprünglichen.



(a) (b)



(c)



(d)

Setzen wir diese Deformationsüberlegungen weiter fort, so sehen wir genauso, dass man den Ring links oben wie in Abbildung (b) auch senkrecht stellen und kleiner machen könnte, ohne dass wir das eigentliche Problem ändern. Danach können wir natürlich auch die darunter liegende Stange immer kürzer machen, so dass der Ring wie in Abbildung (c) letztlich direkt auf der Bodenplatte sitzt. Mit denselben Überlegungen für die anderen vier Ringe folgt also, dass unser ursprüngliches Puzzle effektiv dasselbe ist wie das in Abbildung (d) – das aber offensichtlich trivial ist, denn hier kann man den weißen Ring ja einfach herausnehmen. Wir können dieses Puzzle (und auch die meisten anderen dieser Art, von denen ihr sicher schon einige gesehen habt) also letztlich als topologisches Puzzle bezeichnen. Erstaunlicherweise hilft diese Erkenntnis den meisten Leuten allerdings noch nicht besonders viel bei der konkreten Lösung des ursprünglichen Puzzles: unsere ganzen oben gemachten Vereinfachungen in Schnurbewegungen um die „eigentlich überflüssigen" Holzstangen und Ringe umzuwandeln ist in der Praxis nicht so einfach.

Topologie wird übrigens in der einen oder anderen Form auch in vielen anderen Gebieten der Mathematik benötigt. Wahrscheinlich sind euch topologische Konzepte auch bereits mehrfach in vorherigen Vorlesungen begegnet: z. B. offene, abgeschlossene oder zusammenhängende Mengen in den Grundlagen der Mathematik, homotope Wege in der Funktionentheorie, oder kompakte Mengen in der Funktionalanalysis.

Wir werden uns in dieser Vorlesung die wesentlichen Konzepte der Topologie erarbeiten. Aus mathematischer Sicht bedeutet das „Studium der Deformationen" einfach, dass wir *stetige Abbildungen* betrachten wollen. In der Tat sind die sogenannten *topologischen Räume* (die wir gleich als Erstes in Definition 1.1 einführen werden) und stetigen Abbildungen zwischen ihnen für die Topologie genauso grundlegend und zentral wie beispielsweise die Vektorräume und linearen Abbildungen in der linearen Algebra.

Besonders bemerkenswert ist dabei übrigens, dass die grundlegende Definition eines topologischen Raumes trotz ihrer anschaulichen Motivation zunächst so abstrakt und allgemein klingt, dass man auf den ersten Blick gar nicht vermuten würde, dass dabei etwas Sinnvolles herauskommen kann. Wir werden uns aber sehr schnell vom Gegenteil überzeugen können und sehen, dass es gerade dieses Wechselspiel zwischen abstrakter Theorie einerseits und sehr anschaulichen Sätzen und Beispielen andererseits ist, das die Topologie so interessant macht.