17. Quotientenräume und Dimensionsformeln

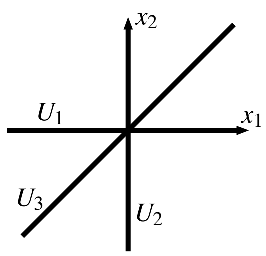
Im letzten Kapitel haben wir den zentralen Begriff der Dimension eines Vektorraums eingeführt. Für alle unsere bisherigen Konstruktionen von Vektorräumen (z. B. als Durchschnitt oder Summe von Unterräumen, als Bild oder Kern einer linearen Abbildung) kennen wir dabei auch explizite Verfahren, wie wir die zugehörigen Dimensionen berechnen können – zunächst mit dem Gauß-Algorithmus für Unterräume von K^n, und dann über Basen bzw. Koordinatenabbildungen auch im allgemeinen Fall.

Es gibt aber auch einige wichtige Beziehungen zwischen diesen Konstruktionen, die es oft ermöglichen, die Dimensionen von bestimmten Vektorräumen auch ohne explizite Rechnung zu bestimmen oder miteinander in Beziehung zu setzen. Wir wollen daher nun in diesem Kapitel noch einige weitere nützliche Konstruktionen und Resultate der Vektorraumtheorie behandeln, mit denen sich unter anderem Dimensionen in vielen Fällen einfach ablesen lassen.

17.A Komplemente und Quotientenräume

Als Erstes wollen wir wie in Lemma 15.14 noch einmal die Konstruktion der Summe $U_1 + \cdots + U_n$ von Unterräumen $U_1, \dots, U_n$ eines Vektorraums V betrachten.

Bemerkung 17.1 (Eindeutigkeit der Summendarstellung)**.** Jeder Vektor in einer Summe $U_1 + \cdots + U_n$ von Unterräumen eines Vektorraums V lässt sich nach Definition als $x_1 + \cdots + x_n$ mit $x_i \in U_i$ für alle $i = 1, \dots, n$ schreiben. Allerdings ist diese Darstellung im Allgemeinen nicht eindeutig: Betrachten wir wie im Bild rechts die drei Ursprungsgeraden



$$U_1 = \operatorname{Lin}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad U_2 = \operatorname{Lin}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad U_3 = \operatorname{Lin}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

in $\mathbb{R}^2$, so hat z. B. der Vektor

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\in U_1} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\in U_2} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{\in U_3} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{\in U_1} + \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}_{\in U_2} + \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{\in U_3} \quad \in U_1 + U_2 + U_3 = \mathbb{R}^2$$

zwei verschiedene Darstellungen dieser Art. Ist die Darstellung jedoch immer eindeutig, so geben wir dieser Situation einen besonderen Namen:

Definition 17.2 (Direkte Summe von Unterräumen)**.** Es seien $U_1, \dots, U_n$ Untervektorräume eines K-Vektorraums V und $U = U_1 + \cdots + U_n$. Hat jedes $x \in U$ eine *eindeutige* Darstellung der Form $x = x_1 + \cdots + x_n$ mit $x_i \in U_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, so nennt man die Summe **direkt**. Möchte man dies auch in der Notation andeuten, so schreibt man dafür $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$.

Die Summe in Bemerkung 17.1 oben ist also nicht direkt – was natürlich einfach daran liegt, dass die drei aufspannenden Vektoren von U_1, U_2 und U_3 linear abhängig sind. In der Tat kann man sich direkte Summen als eine Verallgemeinerung des Konzepts der linearen Unabhängigkeit auf Unterräume vorstellen.

Lemma 17.3 (Dimension direkter Summen)**.** *Die Summe $U_1 + \cdots + U_n$ von Unterräumen $U_1, \dots, U_n$ eines K-Vektorraums V ist genau dann direkt, wenn die Abbildung*

$$f : U_1 \times \cdots \times U_n \to U_1 + \cdots + U_n, \ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \cdots + x_n$$

ein Isomorphismus ist. Ist V endlich-dimensional, so gilt in diesem Fall also insbesondere

$$\dim(U_1 \oplus \cdots \oplus U_n) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_n.$$

Beweis. Es ist klar, dass die Abbildung f in jedem Fall linear ist; außerdem ist f nach Definition der Summe $U_1 + \cdots + U_n$ stets surjektiv. Injektiv ist f genau dann, wenn für alle $x_i, y_i \in U_i$ aus $x_1 + \cdots + x_n = y_1 + \cdots + y_n$ bereits $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$, also $x_i = y_i$ für alle i folgt. Dies bedeutet nach Definition 17.2 aber genau, dass die Summe direkt ist.

Ist V darüber hinaus endlich-dimensional, so gilt dies nach Folgerung 16.20 auch für die Unterräume $U_1, \ldots, U_n$. Da endlich erzeugte isomorphe Vektorräume nach Lemma 16.16 die gleiche Dimension haben, ergibt sich aus Folgerung 16.18 also

$$\dim(U_1 \oplus \cdots \oplus U_n) = \dim(U_1 \times \cdots \times U_n) = \dim U_1 + \cdots + \dim U_n. \qquad \square$$

Im Fall von nur zwei Unterräumen kann man besonders einfach feststellen, ob ihre Summe direkt ist:

Lemma 17.4. *Die Summe $U_1 + U_2$ von zwei Unterräumen U_1 und U_2 eines K-Vektorraums V ist genau dann direkt, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.*

Beweis. Nach Lemma 17.3 ist die Summe $U_1 + U_2$ genau dann direkt, wenn die Abbildung

$$f\colon U_1 \times U_2 \to U_1 + U_2, \ (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$$

ein Isomorphismus ist. Wir hatten im Beweis dieses Lemmas aber auch schon gesehen, dass f stets linear und surjektiv ist. Also ist die Summe $U_1 + U_2$ genau dann direkt, wenn f injektiv ist, d. h. nach Lemma 15.27 genau dann, wenn $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$. Nun ist aber

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ker} f &= \{(x_1, x_2) : x_1 \in U_1, x_2 \in U_2, x_1 + x_2 = 0\} \\
&= \{(x_1, -x_1) : x_1 \in U_1, -x_1 \in U_2\} \\
&= \{(x_1, -x_1) : x_1 \in U_1 \cap U_2\},
\end{aligned}$$

und damit ist wie behauptet genau dann $\operatorname{Ker} f = \{(0,0)\}$, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. $\square$

Beispiel 17.5.

(a) Die Summe $U_1 + U_2$ der x_1-Achse und der x_2-Achse in $\mathbb{R}^3$ in Beispiel 15.15 ist direkt, denn in diesem Fall ist natürlich $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. In der Tat sieht man in diesem Beispiel auch sofort, dass sich jeder Vektor in der x_1-x_2-Ebene $U_1 + U_2$ eindeutig als Summe von einem Vektor in U_1 und einem in U_2 schreiben lässt.

(b) Die Summe $U_1 + U_2 + U_3$ in Bemerkung 17.1 ist hingegen nicht direkt, wie wir dort bereits gesehen hatten. Allerdings ist in diesem Fall trotzdem $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \{0\}$ – was zeigt, dass sich die Aussage von Lemma 17.4 nicht genauso auf mehr als zwei Summanden übertragen lässt. Zu Lemma 17.4 analoge Aussagen für allgemeine Summen sind stattdessen die folgenden:

Aufgabe 17.6. Es seien $U_1, \ldots, U_n$ Unterräume eines K-Vektorraums V mit $V = U_1 + \cdots + U_n$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$.

(b) Sind $u_i \in U_i$ für $i = 1, \ldots, n$ so dass $u_1 + \cdots + u_n = 0$, so gilt bereits $u_1 = \cdots = u_n = 0$.

(c) $U_i \cap (U_1 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_n) = \{0\}$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

(d) $U_i \cap (U_{i+1} + \cdots + U_n) = \{0\}$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$.

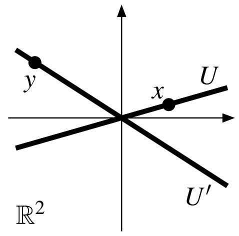
Einen besonderen Namen hat die Situation, wenn die Summe zweier Unterräume direkt und gleich dem gesamten Vektorraum ist.

Definition 17.7 (Komplemente)**.** Es sei U ein Unterraum eines K-Vektorraums V. Ein Unterraum $U' \le V$ heißt **Komplement** von U in V, wenn $U \oplus U' = V$ (nach Lemma 17.4 also $U + U' = V$ und $U \cap U' = \{0\}$) gilt.

Bemerkung 17.8 (Dimension von Komplementen)**.** Nach Lemma 17.3 gilt für jedes Komplement U' eines Untervektorraums U in einem endlich-dimensionalen Vektorraum V die Dimensionsformel $\dim U + \dim U' = \dim V$, also $\dim U' = \dim V - \dim U$.

Beispiel 17.9 (Nichteindeutigkeit von Komplementen)**.** Wie im Bild unten rechts seien $U = \text{Lin}(x)$ und $U' = \text{Lin}(y)$ zwei verschiedene Ursprungsgeraden in $\mathbb{R}^2$. Da x und y dann keine Vielfachen voneinander sind, sind diese beiden Vektoren also linear unabhängig; nach Bemerkung 16.7 (b) bilden sie daher eine Basis des zweidimensionalen Vektorraums $\mathbb{R}^2$.

Nach Algorithmus 15.16 (c) ist damit $U + U' = \text{Lin}(x,y) = \mathbb{R}^2$, außerdem gilt offensichtlich $U \cap U' = \{0\}$. Also ist U' ein Komplement von U.



Da es zu einer gegebenen Ursprungsgeraden U in $\mathbb{R}^2$ aber natürlich unendlich viele Geraden $U' \neq U$ gibt, folgt daraus insbesondere, dass Komplemente von Unterräumen in der Regel nicht eindeutig sind. Wir wollen nun aber sehen, dass Komplemente zumindest im endlich-dimensionalen Fall stets existieren:

Satz 17.10 (Existenz von Komplementen)**.** *Jeder Unterraum U eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V besitzt ein Komplement.*

Beweis. Nach Folgerung 16.20 ist U endlich erzeugt, hat also nach Satz 16.11 eine Basis $(x_1,\dots,x_n)$. Wir ergänzen sie gemäß Folgerung 16.19 (c) zu einer Basis $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ von V und behaupten, dass $U' := \text{Lin}(y_1,\dots,y_m)$ dann ein Komplement von U ist.

- Es ist offensichtlich $U + U' = V$, denn nach Algorithmus 15.16 (c) ist
$$U + U' = \text{Lin}(x_1,\dots,x_n) + \text{Lin}(y_1,\dots,y_m) = \text{Lin}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m) = V.$$
- Es ist $U \cap U' = \{0\}$: Für $x \in U \cap U'$, also $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_m y_m$ für gewisse $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_m \in K$, erhalten wir durch Subtraktion
$$0 = x - x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n - \mu_1 y_1 - \cdots - \mu_m y_m.$$
Da die Familie $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ linear unabhängig ist, ist dies aber nur möglich für $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \mu_1 = \cdots = \mu_m = 0$, also für $x = 0$.

Also ist U' ein Komplement von U in V. □

Bemerkung 17.11 (Berechnung von Komplementen)**.** Beachte, dass der Beweis von Satz 17.10 konstruktiv ist, d. h. auch die konkrete Berechnung eines Komplements ermöglicht: Möchte man ein Komplement U' zu einem Unterraum U eines endlich-dimensionalen Vektorraums V berechnen, muss man nur eine Basis von U zu einer Basis von V ergänzen; die dafür hinzu genommenen Vektoren bilden dann eine Basis eines Komplements U'.

So haben wir z. B. in Beispiel 16.21 (b) im Raum V aller Polynome vom Grad höchstens 2 die Basis $(1, x+x^2)$ von $U := \text{Lin}(1, x+x^2)$ mit dem Polynom x^2 zu einer Basis $(1, x+x^2, x^2)$ von V ergänzt; dementsprechend ist $U' := \text{Lin}(x^2)$ ein Komplement von U in V.

Komplemente von Unterräumen sind in der Praxis sehr nützlich und haben auch eine einfache anschauliche Deutung: Ist U' ein Komplement eines Unterraums U in einem Vektorraum V, so lässt sich ja jeder Vektor aus V nach Definition 17.7 eindeutig als Summe aus einem Vektor in U und einem „Restvektor" in U' schreiben. Wir können uns U' also in gewissem Sinne als einen Unterraum vorstellen, der diese „Restteile" von Vektoren in V misst, wenn man ihren Anteil in U heraus nimmt. Unschön ist an dieser Konstruktion allerdings, dass ein Komplement nach Beispiel 17.9 nicht eindeutig bestimmt und damit ein recht unnatürliches Objekt ist. Was im obigen Sinne der Restteil eines Vektors in V nach Herausnehmen des Anteils in U ist, lässt sich also nicht beantworten, solange man nicht eine (letztlich willkürliche) Wahl eines Komplements von U in V getroffen hat. 39

Wir wollen nun eine deutlich schönere Konstruktion einführen, die solche Restteile auch ohne willkürliche Wahlen messen kann. Der Preis dafür ist, dass der Vektorraum, der diese Restteile auf ganz natürliche Art beschreibt, kein *Unterraum* von V mehr ist, sondern ein sogenannter *Quotientenraum*:

ein Raum von Äquivalenzklassen von Vektoren in V wie in Abschnitt 2.B, wobei wir zwei Vektoren in V miteinander identifizieren wollen, wenn sie sich um ein Element von U voneinander unterscheiden. Diejenigen von euch, die auch die Vorlesung „Algebraische Strukturen“ besuchen, kennen diese Idee vielleicht bereits von den Faktorgruppen [G, Kapitel 6].

Lemma und Definition 17.12. *Es seien V ein K-Vektorraum und $U \leq V$ ein fest gewählter Unterraum. Dann ist durch*

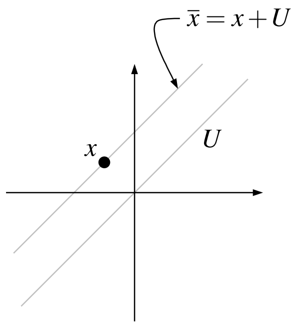
$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y \in U \qquad \text{für alle } x,y \in V$$

eine Äquivalenzrelation auf V definiert. Für die Äquivalenzklasse eines Vektors $x \in V$ bezüglich dieser Relation gilt

$$\overline{x} = x + U := \{x + u : u \in U\},$$

d. h. $\overline{x}$ ist (wie in Beispiel 15.9 (c) und im Bild rechts) ein affiner bzw. verschobener Unterraum mit Aufpunkt x.

Die Menge $V/\sim$ aller Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation bezeichnet man mit V/U.



Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die gegebene Relation eine Äquivalenzrelation wie in Definition 2.30 ist.

Reflexivität: Für alle $x \in V$ gilt $x - x = 0 \in U$ nach Bemerkung 15.8, und damit $x \sim x$.

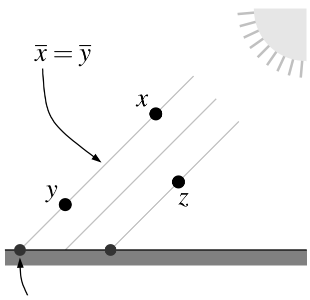
Symmetrie: Es seien $x,y \in V$ mit $x \sim y$, also $x - y \in U$. Dann ist nach Definition 15.6 (a) auch $(-1)(x-y) = y - x \in U$, und damit $y \sim x$.

Transitivität: Sind $x,y,z \in V$ mit $x \sim y$ und $y \sim z$, also $x - y \in U$ und $y - z \in U$, so ist nach Definition 15.6 (a) auch $(x-y)+(y-z) = x - z \in U$, und damit $x \sim z$.

Also ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation. Für die Klasse $\overline{x}$ eines Vektors x gilt nun nach Definition 2.30 (c)

$$\overline{x} = \{y \in V : y - x \in U\} = \{y \in V : y - x = u \text{ für ein } u \in U\} = \{x + u : u \in U\}. \qquad \square$$

Bemerkung 17.13 (Anschauliche Deutung von V/U)**.** Die geometrische Bedeutung des Raumes V/U lässt sich am besten wie im Bild rechts erläutern, in dem $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \operatorname{Lin}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ ist. Dort scheint die Sonne mit parallelen (hell eingezeichneten) Strahlen in Richtung von U und wirft dabei von jedem Punkt in V einen Schatten auf den Boden. In diesem Bild ist die Klasse $\overline{x} \in V/U$ eines Punktes $x \in V$ gerade der Sonnenstrahl durch x. Zwei Punkte in V bestimmen also genau dann den gleichen Punkt in V/U, wenn sie auf dem gleichen Sonnenstrahl liegen, d. h. denselben Schattenpunkt auf dem Boden werfen. Im Bild rechts ist also $\overline{x} = \overline{y} \neq \overline{z}$.



In diesem Sinne kann man sich V/U damit als eine „Schattenwelt“ von V vorstellen, die zwar jeden Punkt von V sieht, aber nur mit einem Teil seiner Informationen: Der „Abstand zur Sonne“ eines Punktes in V ist anhand des Schattenbildes nicht mehr zu rekonstruieren. Für einen Vektor $x \in V$ nimmt die Klasse $\overline{x}$ also wie beabsichtigt „den Anteil in U heraus“.

Bemerkung 17.14. Für zwei Vektoren $x,y \in V$ gilt nach Satz 2.32 (a) genau dann $\overline{x} = \overline{y}$ in V/U, wenn $x \sim y$ ist. Wir sehen mit Definition 17.12 also für alle $x,y \in V$ in V/U:

$$\boxed{\begin{array}{lccc} & \overline{x} = \overline{y} & \Leftrightarrow & x - y \in U, \\ \text{insbesondere also} & \overline{x} = \overline{0} & \Leftrightarrow & x \in U. \end{array}}$$

Mit diesen Rechenregeln kann man Gleichungen zwischen Äquivalenzklassen in V/U immer auf Aussagen über die Repräsentanten in V zurückführen. So ist in der Situation von Bemerkung 17.13 beispielsweise

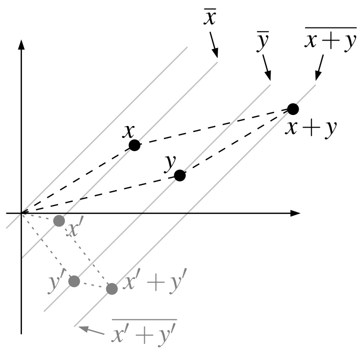
$$\overline{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}} = \overline{\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}}, \quad \text{weil} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \in U.$$

Allerdings fehlt uns noch ein letzter Schritt: Bisher ist der Raum V/U nur eine Menge ohne weitere Struktur. Um ihn im Rahmen der linearen Algebra untersuchen zu können, müssen wir ihn selbst wieder zu einem Vektorraum machen, also auf ihm eine Vektoraddition und Skalarmultiplikation definieren und zeigen, dass damit dann die Vektorraumeigenschaften für V/U gelten.

Die Idee hierfür ist sehr einfach und im Bild rechts dargestellt: Wollen wir die verschobenen Unterräume $\overline{x}$ und $\overline{y}$ in V/U addieren, so addieren wir einfach wie im oberen Teil des Bildes die Aufpunkte x und y und verwenden den so erhaltenen Punkt $x+y$ als Aufpunkt für die Summe, d. h. wir setzen

$$\overline{x}+\overline{y} := \overline{x+y}. \tag{$*$}$$

Allerdings müssen wir dabei etwas aufpassen: Wir hätten für dieselben verschobenen Unterräume statt x und y ja auch wie im unteren Teil des Bildes genauso gut andere Aufpunkte x' bzw. y' wählen können und hätten dann als Ergebnis den verschobenen Unterraum $\overline{x'+y'}$ erhalten!



Damit die Vorschrift $(*)$ wirklich widerspruchsfrei eine Verknüpfung auf V/U definiert, müssen wir also überprüfen, dass der verschobene Unterraum $\overline{x'+y'}$ derselbe ist wie $\overline{x+y}$, d. h. dass *das Endergebnis nicht von der Wahl der Aufpunkte abhängt*. Man sagt dazu auch, dass wir die *Wohldefiniertheit* von $(*)$ überprüfen müssen. Eine solche Überprüfung ist immer dann nötig, wenn wir eine Funktion auf einer Menge von Äquivalenzklassen (hier: V/U) definieren wollen und bei der Konstruktion die Wahl eines Repräsentanten einer Äquivalenzklasse (hier: eines Aufpunkts eines verschobenen Unterraums) verwenden. Die allgemeine Situation ist die folgende:

Notation 17.15 (Wohldefiniertheit)**.** Es sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M. Möchte man auf der Menge $M/\sim$ der Äquivalenzklassen eine Abbildung in eine andere Menge N definieren, so ist die Idee hierfür in der Regel, dass man eine Abbildung $g\colon M \to N$ wählt und dann

$$f\colon M/\sim \to N,\ f(\overline{x}) := g(x) \tag{$*$}$$

setzt. Man möchte das Bild einer Äquivalenzklasse unter f also dadurch definieren, dass man einen Repräsentanten dieser Klasse wählt und diesen dann mit g abbildet. Damit dies nun f widerspruchsfrei definiert, brauchen wir offensichtlich, dass das Ergebnis dieser Vorschrift nicht von der Wahl des Repräsentanten abhängt: Sind $x,y \in M$ äquivalent zueinander, sind sie also Repräsentanten derselben Äquivalenzklasse, so muss $g(x) = g(y)$ gelten. Mit anderen Worten benötigen wir

$$g(x) = g(y) \quad \text{für alle } x,y \in M \text{ mit } \overline{x} = \overline{y},$$

damit die Definition $(*)$ widerspruchsfrei ist. Statt „widerspruchsfrei“ sagt man in diesem Fall wie oben schon erwähnt in der Regel, dass f durch die Vorschrift $(*)$ **wohldefiniert** ist. Die Wohldefiniertheit einer Funktion muss man also immer dann nachprüfen, wenn der Startraum der Funktion eine Menge von Äquivalenzklassen ist und die Funktionsvorschrift Repräsentanten dieser Klassen benutzt. Oder noch etwas allgemeiner: Wenn eine Funktionsvorschrift an irgendeiner Stelle eine Wahl beinhaltet, muss man sich vergewissern, dass der letztliche Funktionswert von dieser Wahl unabhängig ist.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir die Menge V/U nun wie angekündigt zu einem Vektorraum machen:

Satz und Definition 17.16 (Quotientenräume)**.** *Es sei U ein Unterraum eines K-Vektorraums V. Dann sind die Verknüpfungen*

$$\overline{x}+\overline{y} := \overline{x+y} \qquad \text{und} \qquad \lambda \cdot \overline{x} := \overline{\lambda x} \qquad \text{für } x,y \in V \text{ und } \lambda \in K$$

*auf V/U wohldefiniert und machen V/U zu einem K-Vektorraum. Man nennt ihn den **Quotientenraum** bzw. **Faktorraum** von V nach U.*

*Man spricht V/U auch als „V **modulo** U“ und nennt $\overline{x} \in V/U$ für ein $x \in V$ die **Restklasse** von V modulo U.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit der Addition: Sind $x,x',y,y' \in V$ mit $\overline{x} = \overline{x'}$ und $\overline{y} = \overline{y'}$, so bedeutet dies nach Bemerkung 17.14 genau $x - x' \in U$ und $y - y' \in U$. Nach Definition 15.6 (a) ist dann aber auch $(x+y)-(x'+y') = (x-x')+(y-y') \in U$ – was wiederum nach Bemerkung 17.14 genau $\overline{x+y} = \overline{x'+y'}$ bedeutet. Also ist die Addition auf V/U wohldefiniert.

Genauso zeigt man die Wohldefiniertheit der Skalarmultiplikation: Sind $\lambda \in K$ und $x,x' \in V$ mit $\overline{x} = \overline{x'}$, also $x - x' \in U$, so ist nach Definition 15.6 (a) auch $\lambda x - \lambda x' = \lambda(x-x') \in U$ und damit $\overline{\lambda x} = \overline{\lambda x'}$.

Die Vektorraumaxiome für V/U ergeben sich nun unmittelbar aus denen von V. So erhält man z. B. die Assoziativität der Vektoraddition durch die einfache Rechnung

$$\left(\overline{x}+\overline{y}\right)+\overline{z} = \overline{x+y}+\overline{z} = \overline{(x+y)+z} = \overline{x+(y+z)} = \overline{x}+\overline{y+z} = \overline{x}+\left(\overline{y}+\overline{z}\right)$$

für alle $x,y,z \in V$, wobei die mittlere Gleichheit die Assoziativität in V ist und sich die anderen Gleichungen aus der Definition der Addition in V/U ergeben. Die übrigen Eigenschaften überprüft man genauso; der Nullvektor in V/U ist die Klasse $\overline{0}$ des Nullvektors in V bzw. der unverschobene Unterraum U, das additive Inverse eines Elements $\overline{x} \in V/U$ ist $\overline{-x}$. $\square$

Aufgrund der anschaulichen Deutung von Komplementen und Quotientenräumen sollte es nicht verwundern, dass wir nun zeigen können, dass diese beiden Konzepte letztlich das gleiche beschreiben, also als Vektorräume isomorph zueinander sind. Wie oben schon erwähnt ist der Vorteil des Komplements lediglich, dass es als Unterraum des ursprünglichen Vektorraums anschaulich leichter zu verstehen ist; der Vorteil des Quotientenraums ist dagegen, dass er ohne willkürliche Wahlen konstruiert werden kann und damit aus mathematischer Sicht das natürlichere Objekt ist.

Satz 17.17 (Dimension von Quotientenräumen)**.** *Es seien U ein Untervektorraum eines K-Vektorraums V und U' ein Komplement von U. Dann ist die Abbildung*

$$f\colon U' \to V/U,\ x \mapsto \overline{x}$$

ein Isomorphismus.

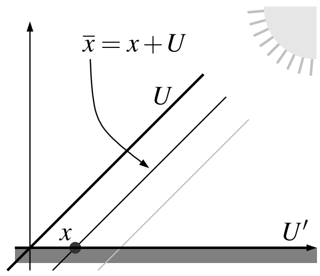
Ist V zusätzlich endlich-dimensional, so gilt also insbesondere $\dim V/U = \dim V - \dim U$.

Beweis. Um zu zeigen, dass f ein Isomorphismus ist, müssen wir die folgenden Dinge überprüfen:

- f ist eine lineare Abbildung, denn für alle $x,y \in U'$ ist
  $$f(x+y) = \overline{x+y} = \overline{x}+\overline{y} = f(x)+f(y),$$
  und eine analoge Aussage gilt natürlich für die Skalarmultiplikation.
- f ist injektiv: Es sei $x \in U'$ mit $f(x) = \overline{x} = \overline{0}$, also $x \in U$ nach Bemerkung 17.14. Dann ist aber $x \in U \cap U' = \{0\}$. Damit ist f nach Lemma 15.27 injektiv.
- f ist surjektiv: Es sei $\overline{x} \in V/U$ beliebig, also $x \in V$. Wegen $V = U + U'$ können wir $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in U$ und $x_2 \in U'$ schreiben. Dann liegt x_2 in der Definitionsmenge U' von f, und es gilt $f(x_2) = \overline{x_2} = \overline{x}$ nach Bemerkung 17.14, da $x - x_2 = x_1 \in U$. Also ist f surjektiv.

Die Zusatzaussage folgt nun sofort daraus, dass das Komplement U' nach Bemerkung 17.8 die Dimension $\dim V - \dim U$ hat. $\square$

Bemerkung 17.18. Das Bild rechts illustriert in der Situation von Bemerkung 17.13 noch einmal, dass der Morphismus f aus Satz 17.17 bijektiv ist: Die Bodenlinie U' ist nach Beispiel 17.9 ein Komplement der Richtung U der Sonnenstrahlen. Die Abbildung f ordnet nun jedem Punkt $x \in U'$ auf dem Boden den Sonnenstrahl $\overline{x} \in V/U$ durch diesen Punkt zu, und liefert offensichtlich eine Bijektion zwischen den Bodenpunkten und der Menge der Sonnenstrahlen. Wenn wir in Bemerkung 17.13 gesagt haben, dass V/U die „Schattenwelt" auf dem Boden ist, haben wir dabei also schon den Isomorphismus zwischen dem eigentlichen Quotientenraum V/U und dem Boden U' verwendet.



Bemerkung 17.19 (Basen von Quotientenräumen)**.** Nach Satz 17.17 (und Lemma 16.16) erhalten wir im endlich-dimensionalen Fall eine Basis des Quotientenraums V/U, indem wir eine Basis eines Komplements von U wählen und die Restklassen dieser Vektoren in V/U nehmen. Kombinieren wir dies mit dem Verfahren aus Bemerkung 17.11, so bedeutet dies: Wir können eine Basis von V/U konstruieren, indem wir eine Basis von U zu einer Basis von V ergänzen und dann die Restklassen der hinzu genommenen Vektoren wählen.

Im Beispiel $V = \mathbb{R}^2$ und $U = \operatorname{Lin}(v)$ mit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus Bemerkung 17.13 ergänzt z. B. e_1 den Vektor v zu einer Basis von $\mathbb{R}^2$, und damit ist $(\overline{e_1})$ eine Basis von V/U.

Damit müssen wir z. B. den Vektor $\overline{e_2} \in V/U$ als Linearkombination dieser Basis, also als Vielfaches von $\overline{e_1}$ schreiben können. Dies ist hier auch einfach zu sehen: Wegen $e_1 + e_2 = v \in U$ ist $\overline{e_1 + e_2} = \overline{0}$ in V/U, also $\overline{e_2} = -\overline{e_1}$. Im Bild von Bemerkung 17.18 bedeutet dies einfach, dass die Vektoren e_2 und $-e_1$ auf dem gleichen Sonnenstrahl liegen.

Aufgabe 17.20.

(a) Zeige, dass

$$f\colon \mathbb{R}^2/\operatorname{Lin}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to \mathbb{R}^2/\operatorname{Lin}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \overline{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \mapsto \overline{\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

ein wohldefinierter Isomorphismus ist.

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/U$, $x \mapsto \overline{x}$ mit $U = \operatorname{Lin}(e_1 - 2e_2 + e_3)$. Bestimme eine Basis B von $\mathbb{R}^3/U$ sowie die zugehörige Abbildungsmatrix $A_f^{E,B}$ für die Standardbasis E von $\mathbb{R}^3$.

(c) Es seien $k, l \in \mathbb{N}_{>0}$ sowie $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l$ Vektoren in einem Vektorraum V. Untersuche, welche der Implikationen „$\Rightarrow$" und „$\Leftarrow$" im Folgenden für das Symbol „$\square$" eingesetzt werden können, damit allgemein wahre Aussagen entstehen:

$$(\overline{v_1}, \dots, \overline{v_k}) \text{ ist linear abhängig in } V/\operatorname{Lin}(w_1, \dots, w_l)$$
$$\square\ (v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l) \text{ ist linear abhängig in } V.$$

Aufgabe 17.21.

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei V_n der Vektorraum der reellen Polynomfunktionen vom Grad höchstens n.

Zeige, dass die Abbildung $f\colon V_{n+1}/V_1 \to \mathbb{R}$, $\overline{\varphi} \mapsto \varphi''(1)$ wohldefiniert ist, und bestimme die Dimension von $\operatorname{Ker} f$.

(b) Es seien U ein Unterraum eines K-Vektorraums V und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass

$$g\colon V/U \to V/U,\ \overline{x} \mapsto \overline{f(x)}$$

genau dann eine lineare Abbildung definiert, wenn $f(U) \subset U$.

17.B Isomorphiesätze und Dimensionsformeln

Als Anwendung der Quotientenräume werden wir nun einige nützliche Isomorphismen zwischen unseren bisherigen Konstruktionen herleiten, aus denen dann weitere wichtige Dimensionsformeln folgen. Als Erstes wollen wir dazu den sogenannten Homomorphiesatz beweisen, der aus jeder linearen Abbildung $f: V \to W$ „einen Isomorphismus machen kann". Die Idee hierfür ist sehr einfach: Natürlich kann man f zunächst einmal surjektiv machen, indem man den Zielraum W durch den Unterraum $\operatorname{Im} f$ ersetzt. Um f auch noch injektiv zu machen, also gemäß Lemma 15.27 den Kern zu $\{0\}$ zu machen, können wir einfach den Startraum V durch den Quotientenraum $V / \operatorname{Ker} f$ ersetzen: Auf diese Art werden alle Elemente des Kerns von f miteinander identifiziert, so dass der Kern der neuen Abbildung auf dem Quotientenraum nur noch aus dem einen Element $\overline{0} = \operatorname{Ker} f$ besteht.

Satz 17.22 (**Homomorphiesatz**)**.** *Für jede lineare Abbildung $f: V \to W$ ist die Abbildung*

$$g: V / \operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f,\ \overline{x} \mapsto f(x)$$

(wohldefiniert und) ein Isomorphismus.

Beweis. Wir müssen einige Dinge überprüfen:

- Die Abbildung g ist wohldefiniert: Sind $x, y \in V$ mit $\overline{x} = \overline{y}$, also $x - y \in \operatorname{Ker} f$ nach Bemerkung 17.14, so ist $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$ und damit $f(x) = f(y)$.
- Die Abbildung g ist linear: Für $x, y \in V$ gilt
$$g(\overline{x} + \overline{y}) = g(\overline{x+y}) = f(x+y) = f(x) + f(y) = g(\overline{x}) + g(\overline{y});$$
analog folgt auch die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation.
- Die Abbildung g ist surjektiv: Dies ist klar nach Definition von $\operatorname{Im} f$, denn jedes Element in $\operatorname{Im} f$ ist ja von der Form $f(x) = g(\overline{x})$ für ein $x \in V$.
- Die Abbildung g ist injektiv: Nach Lemma 15.27 genügt es dafür zu zeigen, dass $\operatorname{Ker} g = \{\overline{0}\}$. Es sei also $x \in V$ mit $g(\overline{x}) = 0$. Dann ist $f(x) = 0$, also $x \in \operatorname{Ker} f$ und damit $\overline{x} = \overline{0} \in V / \operatorname{Ker} f$ nach Bemerkung 17.14. □

Beispiel 17.23 (Anschauliche Deutung des Homomorphiesatzes)**.** Als anschauliches Beispiel für den Homomorphiesatz können wir noch einmal die „Schattenwelt" aus Bemerkung 17.13 und Bemerkung 17.18 betrachten. Ist $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung, die einen Punkt auf seinen Schattenpunkt auf den Boden abbildet, so ist $\operatorname{Ker} f = U$ der Sonnenstrahl durch 0 und $\operatorname{Im} f = U'$ der Boden. Satz 17.22 gibt uns dann den Isomorphismus $g: \mathbb{R}^2 / U \to U'$, der jeden Sonnenstrahl auf seinen Bodenpunkt abbildet und genau die Umkehrung des Isomorphismus aus Satz 17.17 ist.

Aufgabe 17.24. Die lineare Abbildung, die der Situation in Beispiel 17.23 entspricht, ist

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Überprüfe den Homomorphiesatz in diesem Fall explizit, d. h. zeige durch eine direkte Rechnung, dass die Abbildung

$$g: \mathbb{R}^2 / \operatorname{Lin} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \operatorname{Lin} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \overline{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wohldefiniert, linear, surjektiv und injektiv ist.

Folgerung 17.25 (Dimensionsformel für Morphismen)**.** *Für jeden Morphismus $f: V \to W$ zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen gilt* $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim V$.

Beweis. Nach dem Homomorphiesatz 17.22 ist $V / \operatorname{Ker} f$ isomorph zu $\operatorname{Im} f$. Also gilt

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim(V / \operatorname{Ker} f) = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f$$

nach Satz 17.17. □

40

Nach Kernen und Bildern linearer Abbildungen betrachten wir als Nächstes Summen und Durchschnitte von Unterräumen. Auch dafür gibt es zunächst wieder eine nützliche Isomorphieaussage.

Satz 17.26 (**Isomorphiesatz** für Durchschnitte und Summen)**.** *Es seien U_1 und U_2 zwei Unterräume eines K-Vektorraums V. Dann ist die Abbildung*

$$g\colon U_1/(U_1 \cap U_2) \to (U_1+U_2)/U_2,\ \overline{x} \mapsto \overline{x}$$

(wohldefiniert und) ein Isomorphismus.

Beweis. Wir betrachten zunächst die Abbildung

$$f\colon U_1 \to (U_1+U_2)/U_2,\ x \mapsto \overline{x}.$$

Sie ist offensichtlich linear (und Wohldefiniertheit muss hier nicht überprüft werden, da der Startraum kein Quotientenraum ist). Wir bestimmen das Bild und den Kern von f:

- $\operatorname{Im} f = (U_1+U_2)/U_2$, d. h. f ist surjektiv: Für ein beliebiges Element $\overline{x_1+x_2} \in (U_1+U_2)/U_2$ (mit $x_1 \in U_1$ und $x_2 \in U_2$) ist $x_1 \in U_1$ ein Urbild unter f, denn $f(x_1) = \overline{x_1} = \overline{x_1+x_2}$.
- $\operatorname{Ker} f = U_1 \cap U_2$: Ein Element $x \in U_1$ liegt genau dann im Kern von f, wenn $f(x) = \overline{x} = \overline{0}$ ist, was nach Bemerkung 17.14 äquivalent ist zu $x \in U_2$. Der Kern von f besteht also aus allen Elementen von U_1, die auch in U_2 liegen, und ist damit gleich $U_1 \cap U_2$.

Der Homomorphiesatz 17.22 für f liefert nun den Isomorphismus $g\colon U_1/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f,\ \overline{x} \mapsto f(x)$, also wie behauptet

$$g\colon U_1/(U_1 \cap U_2) \to (U_1+U_2)/U_2,\ \overline{x} \mapsto \overline{x}. \qquad \square$$

Bemerkung 17.27. In der Literatur sind für die Sätze 17.22 und 17.26 z. T. recht unterschiedliche Bezeichnungen üblich. Manche Bücher bezeichnen sie als den 1. und 2. Isomorphiesatz, während andere aber auch Satz 17.26 den 1. Isomorphiesatz nennen.

Folgerung 17.28 (Dimensionsformel für Durchschnitte und Summen)**.** *Sind U_1 und U_2 endlich erzeugte Unterräume eines K-Vektorraums V, so gilt*

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1+U_2) = \dim U_1 + \dim U_2.$$

Beweis. Nach dem Isomorphiesatz 17.26 haben $U_1/(U_1 \cap U_2)$ und $(U_1+U_2)/U_2$ dieselbe Dimension. Aus der Dimensionsformel für Quotienten in Satz 17.17 ergibt sich also

$$\dim U_1 - \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1+U_2) - \dim U_2$$

und somit die Behauptung. $\square$

Beispiel 17.29. Beachte, dass nur die Summe der Dimensionen von $U_1 \cap U_2$ und U_1+U_2 durch $\dim U_1$ und $\dim U_2$ bestimmt sind, nicht aber die Dimensionen von $U_1 \cap U_2$ und U_1+U_2 selbst. Als einfaches Beispiel hierfür seien U_1 und U_2 zwei Geraden (durch den Ursprung) in $\mathbb{R}^2$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

(a) Ist $U_1 = U_2$, so ist $U_1 \cap U_2 = U_1+U_2 = U_1 = U_2$, und die Dimensionsformel ergibt

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1+U_2) = 1+1 = 1+1 = \dim U_1 + \dim U_2.$$

(b) Ist hingegen $U_1 \neq U_2$, so ist $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und $U_1+U_2 = \mathbb{R}^2$, und damit

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1+U_2) = 0+2 = 1+1 = \dim U_1 + \dim U_2.$$

Aufgabe 17.30.

(a) Es seien V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \leq V$ mit $\dim V = 6$, $\dim U_1 = 5$ und $\dim U_2 = 3$.

Welche Dimension kann $U_1 \cap U_2$ haben? Gib für jede solche Möglichkeit ein konkretes Beispiel für U_1, U_2 und V an.

(b) Es seien $U_1,\dots,U_k$ Unterräume eines n-dimensionalen K-Vektorraums V. Zeige, dass

$$\dim(U_1\cap\cdots\cap U_k)\geq\sum_{i=1}^{k}\dim U_i-(k-1)\,n.$$

Aufgabe 17.31. In $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Untervektorräume

$$U_1=\operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\-1\\3\end{pmatrix}\right)\quad\text{und}\quad U_2=\{x\in\mathbb{R}^4:2x_1-x_3-3x_4=x_1-5x_2-3x_3+6x_4=0\},$$

wobei $x_1,\dots,x_4$ wie üblich die Koordinaten von $x\in\mathbb{R}^4$ sind.
Berechne Basen von $U_1/(U_1\cap U_2)$ und $(U_1+U_2)/U_2$.