16. Basen und Dimension

Im letzten Kapitel haben wir viele Konzepte der allgemeinen Vektorraumtheorie eingeführt: Neben dem Vektorraumbegriff selbst haben wir Unterräume sowie deren Durchschnitte und Summen betrachtet, Morphismen mit ihrem Bild und Kern definiert, und dazu Umkehrmorphismen sowie Verkettungen untersucht. Dabei haben wir immer wieder gesehen, dass die betrachteten Konstruktionen im Fall von Vektorräumen der Form K^n für ein $n \in \mathbb{N}$ auch ganz explizit beschrieben und berechnet werden können.

Wir wollen nun sehen, wie wir diese Rechenmethoden auf einen beliebigen Vektorraum V übertragen können. Die Idee dafür ist, eine sogenannte *Basis* von V zu finden – dies sind (im Moment der Einfachheit halber endlich viele) Vektoren $x_1, \dots, x_n \in V$, so dass sich jedes $x \in V$ auf eindeutige Art als Linearkombination

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$$

dieser ausgewählten Vektoren mit geeigneten Skalaren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ schreiben lässt. Die $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ lassen sich dann als „Koordinaten" von x bezüglich der Vektoren $x_1, \dots, x_n$ auffassen. Da sie das Element $x \in V$ eindeutig beschreiben und einen Vektor in K^n bilden, ist die Abbildung $V \to K^n$, die jedem Vektor seine Koordinaten bezüglich $x_1, \dots, x_n$ zuordnet, ein Isomorphismus. Gemäß Beispiel 15.31 bedeutet dies dann, dass wir mit diesem Isomorphismus alle Rechenmethoden für K^n auf V übertragen können.

16.A Linearkombinationen und Basen

Um die oben beschriebene Idee umzusetzen, müssen wir als Erstes den Begriff der Linearkombination, den wir in Definition 14.21 ja schon für Vektoren in K^n eingeführt hatten, auf beliebige Vektorräume übertragen. Dies funktioniert prinzipiell genau wie erwartet und hat auch die gleiche anschauliche Bedeutung – allerdings müssen wir für den allgemeinen Fall auch unendliche Familien von Vektoren zulassen, aus denen wir die Linearkombinationen bilden.

Definition 16.1 (Familien und Linearkombinationen)**.** Es sei V ein K-Vektorraum.

(a) Eine **Familie** von Vektoren in V ist eine Indexmenge I zusammen mit einem Vektor $x_i \in V$ für alle $i \in I$. Wir schreiben eine solche Familie als $B = (x_i)_{i \in I}$ und nennen die x_i ihre **Elemente**. Ist die Indexmenge I endlich, so sprechen wir auch von einer **endlichen Familie** B, wählen als Indexmenge in der Regel $I = \{1, \dots, n\}$, und schreiben die Familie dann einfach als $B = (x_1, \dots, x_n)$.

(b) Es sei $B = (x_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V. Eine **Linearkombination** der Vektoren aus B ist ein Vektor der Form

$$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i \quad \in V, \tag{$*$}$$

wobei $\lambda_i \in K$ für alle $i \in I$ gilt *und nur endlich viele dieser* λ_i *ungleich* 0 *sind* (so dass der Ausdruck ($*$) nach Weglassen aller Summanden, die 0 sind, also in jedem Fall nur eine endliche Summe ist). Im Fall der endlichen Indexmenge $I = \{1, \dots, n\}$ schreibt man die Linearkombination in der Regel als $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ oder $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$.

Analog zur bisherigen Notation bezeichnen wir die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus B mit $\operatorname{Lin} B$.

Bemerkung 16.2.

(a) Beachte, dass eine *Familie* $B = (x_i)_{i \in I}$ nicht das gleiche ist wie eine *Menge* $\{x_i : i \in I\}$ von Vektoren: Im Gegensatz zu einer Menge sind die gegebenen Vektoren in einer Familie den

Elementen einer Indexmenge zugeordnet, haben also z. B. im Fall einer endlichen Familie mit Indexmenge $\{1,\dots,n\}$ eine festgelegte Reihenfolge $x_1,\dots,x_n$. Für die obige Definition 16.1 (b) ist dies noch nicht wichtig (wir hätten $\operatorname{Lin} B$ genauso gut auf die gleiche Art für eine *Menge* B definieren können, und in der Tat wird das in der Literatur auch oft getan), aber später werden wir die gegebene Reihenfolge der Vektoren zwingend benötigen, um die Koordinaten eines Vektors den Elementen von B zuordnen zu können.

(b) Im Folgenden werden wir uns in vielen Fällen nur mit endlichen Familien beschäftigen. In diesem Fall ist die Bedingung in Definition 16.1 (b), dass nur endlich viele der Koeffizienten λ_i ungleich 0 sein dürfen, natürlich automatisch erfüllt und kann daher auch weggelassen werden. Im Fall unendlicher Familien ist sie jedoch sehr wichtig, da der Ausdruck $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ sonst eine unendliche Summe wäre und damit ohne Konvergenzbetrachtungen wie in Kapitel **??** (die nicht Gegenstand der linearen Algebra sind und in einem allgemeinen Körper auch gar nicht definiert werden könnten) keinen Sinn ergeben würde.

(c) Genau wie in Beispiel 15.8 (b) zeigt man wieder, dass $\operatorname{Lin} B$ für jede Familie B in einem Vektorraum V ein Unterraum ist. Wir nennen $\operatorname{Lin} B$ daher auch hier den von B **erzeugten** oder **aufgespannten Unterraum** von V.

Beispiel 16.3.

(a) Für Vektoren $x_1,\dots,x_n$ in K^m mit $m,n \in \mathbb{N}$ stimmt unsere neue Definition 16.1 (b) von $\operatorname{Lin}(x_1,\dots,x_n)$ offensichtlich mit der alten aus Definition 14.21 (a) überein.

(b) Im Vektorraum $V = \operatorname{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ aller reellen Zahlenfolgen aus Beispiel 15.3 (d) betrachten wir die Familie $B = (e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ aller „Einheitsfolgen“ $e_i = (0,\dots,0,1,0,0,\dots)$, wobei die 1 jeweils an der Stelle i steht. Wegen der Endlichkeitsbedingung in Definition 16.1 (b) ist $\operatorname{Lin} B$ dann *nicht* der gesamte Raum aller Folgen, sondern nur die Menge aller Folgen, bei denen nur endlich viele Folgenglieder ungleich 0 sind.

Mit unseren Vorarbeiten können wir nun den Begriff der Basis eines Vektorraums definieren. Dazu müssen wir auch den Begriff der linearen Unabhängigkeit aus Definition 14.21 (b) auf unsere neue Situation erweitern, was wieder genau wie erwartet funktioniert.

Definition 16.4 (Basen von Vektorräumen)**.** Es sei $B = (x_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren in einem K-Vektorraum V.

(a) Die Familie B heißt ein **Erzeugendensystem** von V, wenn $\operatorname{Lin} B = V$ gilt, d. h. wenn sich jeder Vektor $x \in V$ als Linearkombination der Vektoren in B schreiben lässt.

(b) Die Familie B heißt **linear abhängig**, wenn es eine Linearkombination $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$ des Nullvektors gibt, in der mindestens ein λ_i ungleich 0 ist (man nennt dies auch eine *nicht-triviale Linearkombination* des Nullvektors).

Ist das Gegenteil der Fall, folgt aus der Linearkombination $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$ des Nullvektors mit zunächst beliebigen $\lambda_i \in K$ also bereits, dass alle λ_i gleich 0 sein müssen, so heißt B **linear unabhängig**.

(c) Die Familie B heißt eine **Basis** von V, wenn B ein Erzeugendensystem von V und linear unabhängig ist.

Beispiel 16.5.

(a) Sind $x_1,\dots,x_n$ in K^m linear unabhängig, so ist $(x_1,\dots,x_n)$ nach Definition eine Basis von $\operatorname{Lin}(x_1,\dots,x_n)$. In der Tat können wir unsere Konvention in Bemerkung 15.10, dass wir unter der „Berechnung“ eines Unterraums $U \le K^m$ die Angabe linear unabhängiger $x_1,\dots,x_n$ mit $U = \operatorname{Lin}(x_1,\dots,x_n)$ verstehen wollen, jetzt so umformulieren, dass wir eine Basis von U angeben wollen.

(b) Nach (a) ist insbesondere $(e_1,\dots,e_n)$ eine Basis von $K^n = \operatorname{Lin}(e_1,\dots,e_n)$, da die Einheitsvektoren nach Beispiel 14.22 (a) linear unabhängig sind. Sie wird die **Standardbasis** von

K^n genannt und ist sicher die wichtigste und einfachste Basis von K^n – aber bei weitem nicht die einzige, wie wir gleich in Folgerung 16.6 sehen werden.

Als Spezialfall davon für $n = 0$ ist die leere Familie eine Basis des Nullvektorraums.

(c) Im Vektorraum $V \leq \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller Polynomfunktionen aus Beispiel 15.8 (d) ist die Familie $B = (x^i)_{i\in\mathbb{N}}$ aller Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten eine Basis von V:

- B ist ein Erzeugendensystem, da jede Polynomfunktion nach Definition eine (endliche!) Linearkombination der Potenzfunktionen x^i ist;
- B ist linear unabhängig, da eine nicht-triviale Linearkombination der x^i nach dem Koeffizientenvergleich aus Lemma 3.21 nie die Nullfunktion sein kann.

Genauso ist natürlich $(x^0, x^1, \dots, x^n)$ eine Basis des Vektorraums aller Polynomfunktionen vom Grad höchstens n.

(d) Umformuliert bedeutet Beispiel 16.3 (b), dass die Einheitsfolgen $e_i = (0,\dots,0,1,0,0,\dots)$, wobei die 1 an Position i steht, kein Erzeugendensystem des Folgenraums $\mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ bilden. Sie sind jedoch linear unabhängig, denn ist $\sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i = (0,0,0,\dots)$ (für eine gewisse Summe mit nur endlich vielen $\lambda_i \neq 0$), so folgt durch Vergleich des i-ten Folgengliedes natürlich sofort $\lambda_i = 0$ für alle i.

Wie ihr sicher schon erwartet, können wir auch die in Definition 16.4 eingeführten Eigenschaften im Fall von Familien im Vektorraum K^n wieder ganz einfach explizit überprüfen – für die lineare Unabhängigkeit hatten wir dies ja auch schon in Folgerung 14.30 (a) gesehen.

Folgerung 16.6 (**Rangkriterium** für Basen in K^m). *Es seien $m,n \in \mathbb{N}$ und $x_1,\dots,x_n \in K^m$; wir setzen $A := (x_1 \,|\, \cdots \,|\, x_n) \in K^{m\times n}$.*

(a) *Die Familie $(x_1,\dots,x_n)$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $\mathrm{rk}\,A = n$ gilt.*

(b) *Die Familie $(x_1,\dots,x_n)$ erzeugt genau dann K^m, wenn $\mathrm{rk}\,A = m$ gilt.*

Insbesondere ist $(x_1,\dots,x_n)$ also genau dann eine Basis von K^m, wenn $\mathrm{rk}\,A = m = n$ ist.

Beweis.

(a) ist genau unser altes Rangkriterium aus Folgerung 14.30.

(b) Die Familie $(x_1,\dots,x_n)$ erzeugt genau dann K^m, wenn $\mathrm{Im}\,A \overset{14.21\,(a)}{=} \mathrm{Lin}(x_1,\dots,x_n) = K^m$ ist, also wenn die Abbildung f_A surjektiv ist. Dies ist nach Folgerung 15.25 (a) genau für $\mathrm{rk}\,A = m$ der Fall. □

Bemerkung 16.7.

(a) Nach Folgerung 16.6 hat jede Basis von K^m genau m Elemente.

(b) Haben wir umgekehrt genau m Vektoren in K^m, so besagt Folgerung 16.6 ebenfalls, dass diese Vektoren schon eine Basis von K^m bilden, wenn wir sie nur als linear unabhängig *oder* Erzeugendensystem voraussetzen. Dies halbiert also den Arbeitsaufwand, wenn wir von gegebenen Vektoren in K^m überprüfen wollen, ob sie eine Basis bilden.

In der Tat können wir im Fall des Vektorraums K^m nicht nur zeigen, dass jede Basis genau m Elemente hat, sondern auch Erzeugendensysteme mit mehr als m bzw. linear unabhängige Familien mit weniger als m Elementen konstruktiv zu einer Basis machen:

Folgerung 16.8 (**Basisauswahl** und **Basisergänzung** in K^m). *Es sei $(x_1,\dots,x_n)$ eine Familie von n Vektoren in K^m.*

(a) *Ist $(x_1,\dots,x_n)$ ein Erzeugendensystem von K^m, so ist $n \geq m$, und man kann aus diesen Vektoren m Vektoren auswählen, die eine Basis von K^m bilden.*

Mit anderen Worten ist eine Basis von K^m dasselbe wie ein minimales *Erzeugendensystem von K^m – also ein Erzeugendensystem, das sich nicht weiter verkleinern lässt.*

(b) *Ist $(x_1,\dots,x_n)$ linear unabhängig, so ist $n \leq m$, und man kann diese Vektoren mit geeigneten Einheitsvektoren zu m Vektoren ergänzen, die eine Basis von K^m bilden.*

Mit anderen Worten ist eine Basis von K^m dasselbe wie eine maximale linear unabhängige Familie in K^m – also eine linear unabhängige Familie, die sich nicht weiter vergrößern lässt.

Beweis.

(a) Mit dem Verfahren aus Folgerung 14.31 **??** können wir aus den gegebenen Vektoren linear unabhängige auswählen, die ebenfalls K^m erzeugen, also eine Basis von K^m sind. Nach Bemerkung 16.7 (a) müssen dies dann genau m Vektoren sein.

(b) Mit dem Algorithmus aus Folgerung **??** können wir die gegebenen Vektoren zu m linear unabhängigen Vektoren ergänzen, die nach Bemerkung 16.7 (b) dann eine Basis von K^m sein müssen. □

16.B Endlich erzeugte Vektorräume

Um Vektorräume (wie in der Einleitung zu diesem Kapitel beschrieben) mit Hilfe von Basen untersuchen zu können, müssen wir uns jetzt natürlich noch fragen, ob denn überhaupt jeder Vektorraum eine Basis besitzt – aus den Vektorraumaxiomen ist das ja nicht offensichtlich. In der Tat ist das aber so: Man kann beweisen, dass jeder beliebige Vektorraum eine Basis hat.

Wir wollen uns beim Beweis dieser Tatsache allerdings auf Vektorräume beschränken, die von *endlich vielen* Elementen erzeugt werden können und dann auch eine *endliche* Basis besitzen (den allgemeinen Beweis könnt ihr z. B. in [GK] Proposition II.2.22 finden). Dies liegt zum einen daran, dass der Beweis für Vektorräume mit unendlichen Basen deutlich komplizierter und abstrakter ist. Zum anderen – und das ist fast der wichtigere Grund – ist der Beweis im allgemeinen Fall *nicht konstruktiv* und daher eigentlich nur von theoretischem Interesse. Betrachten wir z. B. noch einmal den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\text{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ aller reellen Zahlenfolgen aus Beispiel 15.3 (d) und Beispiel 16.5 (d): Wir werden in Beispiel 16.13 **??** sehen, dass dieser Vektorraum keine *endliche* Basis besitzt. Man weiß nun zwar aufgrund des oben angegebenen Satzes, dass dieser Folgenraum dennoch eine (unendliche) Basis hat, aber niemand kann eine solche Basis konkret angeben! Versucht doch einmal, eine Basis zu finden – ihr werdet sehr schnell merken, dass das aussichtslos ist. Zur Erinnerung: Ihr müsstet dazu eine (unendliche) Familie von Folgen hinschreiben, so dass *jede beliebige* Folge auf *eindeutige* Art eine *endliche* Linearkombination der Folgen ist, die ihr ausgewählt habt.

Formal bedeutet dies, dass wir uns in Zukunft in der Regel auf Vektorräume mit der folgenden Zusatzbedingung beschränken wollen.

Definition 16.9 (Endlich erzeugte Vektorräume)**.** Ein K-Vektorraum V heißt **endlich erzeugt**, wenn er ein Erzeugendensystem aus endlich vielen Vektoren besitzt.

Analog zur Basisauswahl in Folgerung 16.8 (a) würde man nun sicher erwarten, dass man aus einem solchen endlichen Erzeugendensystem eine Basis auswählen und so insbesondere die Existenz einer Basis zeigen kann. In der Tat werden wir dies nun beweisen – allerdings können wir dazu nicht unseren alten Beweis verwenden, da er auf Rechnungen mit Matrizen beruht und damit nicht auf abstrakte Vektorräume übertragbar ist. Stattdessen benutzen wir hier ein anderes (und ebenfalls konstruktives) Verfahren zur Basisauswahl, das iterativ so lange Vektoren aus dem gegebenen Erzeugendensystem streicht, bis eine Basis vorliegt.

Satz 16.10 (Existenz von Basen)**.** *Jeder endlich erzeugte Vektorraum hat eine endliche Basis.*

Beweis. Es sei V ein endlich erzeugter Vektorraum, d. h. es existiert ein endliches Erzeugendensystem $B = (x_1,\dots,x_n)$ von V.

Ist B nun bereits linear unabhängig, so sind wir natürlich fertig. Andernfalls gibt es eine nichttriviale Linearkombination $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ des Nullvektors, d. h. es gibt ein $i \in \{1,\dots,n\}$ mit $\lambda_i \neq 0$. Wir setzen nun $B' = (x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$ und behaupten, dass B' immer noch ein Erzeugendensystem von V ist.

In der Tat ist dies leicht einzusehen: Aus der Linearkombination des Nullvektors folgt wegen $\lambda_i \neq 0$

$$x_i = \frac{1}{\lambda_i} \cdot \big(-\lambda_1 x_1 - \cdots - \lambda_{i-1} x_{i-1} - \lambda_{i+1} x_{i+1} - \cdots - \lambda_n x_n \big) \quad \in \operatorname{Lin} B'.$$

Damit enthält der Unterraum $\operatorname{Lin} B'$ alle Vektoren $x_1, \dots, x_n$, und somit auch alle Linearkombinationen davon, d. h. es ist bereits $\operatorname{Lin} B' = \operatorname{Lin} B = V$.

Ist B' nun linear unabhängig, so sind wir wieder fertig. Andernfalls wiederholen wir das obige Verfahren so lange, bis die resultierende Familie linear unabhängig und damit eine Basis von V ist (dies muss spätestens nach n Schritten passieren, da dann keine Vektoren mehr übrig sind und die leere Familie natürlich linear unabhängig ist). □

Mit einer solchen Basis $(x_1, \dots, x_n)$ eines Vektorraums V erhalten wir nun zu jedem $x \in V$ zugehörige Koordinaten, die einen Isomorphismus von V nach K^n liefern:

Konstruktion 16.11 (Koordinatenabbildungen)**.** Es sei V ein Vektorraum mit einer gegebenen Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$. Dann ist die Abbildung

$$f \colon K^n \to V, \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$$

offensichtlich linear, und außerdem bijektiv:

- Sie ist surjektiv, weil B ein Erzeugendensystem von V ist; und
- sie ist nach Lemma 15.23 injektiv, da aus der linearen Unabhängigkeit von B folgt, dass $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ ist.

Jeder Vektor $x \in V$ lässt sich also auf eindeutige Art als Linearkombination $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ schreiben. Wir nennen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die **Koordinaten** von x bezüglich B, und die Umkehrabbildung von f

$$\Phi_B \colon V \to K^n, \ \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

die **Koordinatenabbildung** zu B. Mit diesem Isomorphismus Φ_B ist also $V \cong K^n$.

Entscheidend ist dabei die Beobachtung, dass die Vektorräume K^n für verschiedene n nach Beispiel 15.31 (d) ja nicht isomorph zueinander sind und die Zahl n in Konstruktion 16.11 damit durch V schon eindeutig bestimmt ist. Dies führt zum folgenden wichtigen Begriff der Dimension eines Vektorraums.

Satz und Definition 16.12 (Dimension von Vektorräumen)**.** *Alle Basen eines endlich erzeugten Vektorraums V (sind endlich und) haben gleich viele Elemente. Man nennt diese Anzahl Elemente die **Dimension** von V, und schreibt sie als $\dim_K V$ oder einfach $\dim V$.*

*Ist V nicht endlich erzeugt (und hat damit natürlich auch keine endliche Basis), so schreiben wir formal $\dim V = \infty$. Ein endlich erzeugter Vektorraum wird daher oft auch als **endlich-dimensionaler Vektorraum** bezeichnet.*

Beweis. Nach Satz 16.10 hat V eine endliche Basis $B = (x_1, \dots, x_n)$; dies liefert nach Konstruktion 16.11 einen Isomorphismus $\Phi_B \colon V \to K^n$.

Es sei nun C eine weitere Basis von V. Wäre C unendlich, so gäbe es insbesondere $n+1$ linear unabhängige Vektoren $y_1, \dots, y_{n+1} \in V$, und damit eine Koordinatenabbildung $\Phi_C \colon U \to K^{n+1}$ mit $U := \operatorname{Lin}(y_1, \dots, y_{n+1}) \leq V$. Dann wäre aber die Abbildung $f \colon K^{n+1} \to K^n$, $x \mapsto \Phi_B(\Phi_C^{-1}(x))$ linear und injektiv; ihre Abbildungsmatrix $A_f \in K^{n \times (n+1)}$ hätte also nach Folgerung 15.25 (a) den Rang $n+1$ – was offensichtlich ein Widerspruch zu Bemerkung 14.9 (a) ist.

Also ist $C = (y_1,\dots,y_m)$ endlich, und liefert eine Koordinatenabbildung $\Phi_C \colon V \to K^m$. Damit ist aber $\Phi_B \circ \Phi_C^{-1} \colon K^m \to K^n$ ein Isomorphismus, was nach Beispiel 15.31 (d) nur für $m = n$ möglich ist. □

Beispiel 16.13.

(a) Da die Standardbasis von K^n für ein $n \in \mathbb{N}$ genau n Elemente hat, ist natürlich $\dim K^n = n$.

(b) Nach Beispiel 16.5 (c) hat der Vektorraum V aller reellen Polynomfunktionen vom Grad höchstens n eine Basis $B = (x^0, x^1, \dots, x^n)$. Es ist also $\dim V = n+1$, und die zu B gehörige Koordinatenabbildung ist

$$\Phi_B \colon V \to \mathbb{R}^{n+1},\ a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mapsto \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

wie in Beispiel 15.31 (c).

(c) Es sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ der Raum aller reellen Zahlenfolgen aus Beispiel 15.3 (d). Nach Beispiel 16.5 (d) besitzt V eine unendliche linear unabhängige Familie von Vektoren und kann somit wie im Beweis von Satz 16.12 nicht endlich erzeugt sein. Es ist also $\dim V = \infty$.

Bemerkung 16.14 (Klassifikation endlich-dimensionaler Vektorräume)**.** Fassen wir die Ergebnisse aus Satz 16.10, Konstruktion 16.11 und Satz 16.12 zusammen, so haben wir insgesamt gezeigt:

Jeder endlich erzeugte Vektorraum V ist (über die Koordinatenabbildung zu einer beliebigen Basis) isomorph zu K^n für genau ein $n \in \mathbb{N}$, nämlich für $n = \dim V$.

Dies ist ein sehr wichtiges Resultat: Immer wenn man eine neue mathematische Struktur eingeführt und ein paar Beispiele untersucht hat, wäre es natürlich wünschenswert, wenn man vielleicht sogar eine *vollständige* Liste aller Beispiele angeben könnte – in unserem Fall also eine vollständige Liste aller (endlich erzeugten) Vektorräume. Dabei soll „vollständig“ immer „vollständig bis auf Isomorphie“ bedeuten, da wir ja in Beispiel 15.31 schon gesehen haben, dass isomorphe Vektorräume von ihrer Struktur her ohnehin ununterscheidbar sind, so dass es uns bei isomorphen Vektorräumen natürlich reichen sollte, wenn einer von ihnen in unserer Liste steht.

Bei vielen mathematischen Strukturen ist eine derartige Klassifikation schlichtweg aussichtslos, weil es viel zu viele Beispiele gibt, die auch keinem ersichtlichen Schema folgen. Dies ist z. B. bei Gruppen (siehe Definition 3.1) der Fall – niemand kann eine vollständige Liste aller Gruppen (bis auf Isomorphie) angeben. Es ist eine Besonderheit der linearen Algebra, dass dies bei endlich erzeugten Vektorräumen anders ist: Wie wir jetzt gesehen haben, sind diese Vektorräume genau durch ihre Dimension klassifiziert, d. h. zu jedem Körper K und jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es bis auf Isomorphie *genau einen* K-Vektorraum dieser Dimension, nämlich K^n.

Auf diese Art sollten wir nun also alle unsere Ergebnisse und Rechenverfahren zum Vektorraum K^n auf einen beliebigen endlich erzeugten Vektorraum V übertragen können, indem wir statt mit den Elementen $x \in V$ mit den Koordinatenvektoren $\Phi_B(x) \in K^n$ zu einer beliebigen Basis B rechnen. Dies werden wir im Rest dieses Kapitels ausführlich tun.

Wir beginnen damit, dass Isomorphismen (wie z. B. Koordinatenabbildungen) wie erwartet alle in diesem Kapitel eingeführten Begriffe erhalten.

Lemma 16.15. *Es seien $f \colon V \to W$ ein Morphismus zwischen K-Vektorräumen, $B = (x_1,\dots,x_n)$ eine endliche Familie in V und $f(B) := (f(x_1),\dots,f(x_n))$ die zugehörige Familie der Bildvektoren in W. Dann gilt:*

(a) *Ist f surjektiv und B ein Erzeugendensystem von V, so ist $f(B)$ ein Erzeugendensystem von W.*

(b) *Ist f injektiv und B linear unabhängig, so ist auch $f(B)$ linear unabhängig.*

Insbesondere erhalten Isomorphismen also Erzeugendensysteme, die lineare Unabhängigkeit, und damit auch Basen und die Dimension.

Beweis.

(a) Es sei $y \in W$ beliebig. Da f surjektiv ist, gibt es ein $x \in V$ mit $f(x) = y$, und weil B ein Erzeugendensystem von V ist, können wir $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ für gewisse $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ schreiben. Damit ist aber auch

$$y = f(x) = f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \quad \in \operatorname{Lin} f(B).$$

Also ist $\operatorname{Lin} f(B) = W$, d. h. $f(B)$ ist ein Erzeugendensystem von W.

(b) Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) = 0$, also (weil f ein Morphismus ist) mit

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = 0.$$

Nach Voraussetzung ist f injektiv, d. h. es ist $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ aufgrund von Lemma 15.23. Also folgt bereits $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ und damit auch $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, da B linear unabhängig ist. Die Familie $f(B)$ ist somit linear unabhängig. □

Beispiel 16.16 (Basen und Dimension von Matrixräumen)**.** Wir hatten in Beispiel 15.31 (b) schon gesehen, dass der Matrixraum $K^{m \times n}$ isomorph zu K^{mn} ist, indem man alle Einträge der Matrix untereinander schreibt. Insbesondere ist also $\dim K^{m \times n} = mn$. Außerdem bilden die Matrizen, die bezüglich dieses Isomorphismus den Einheitsvektoren in K^{mn} entsprechen, nach Lemma 16.15 eine Basis von $K^{m \times n}$ – nämlich die Matrizen, in denen jeweils ein Eintrag 1 ist und alle anderen 0. So ist z. B.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $K^{2 \times 2}$.

Folgerung 16.17 (Dimension von Produkten)**.** *Sind V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume, so gilt*

$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W.$$

Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für Produkte von mehr als zwei Vektorräumen.

Beweis. Nach Bemerkung 16.14 gibt es Isomorphismen $f\colon V \to K^n$ und $g\colon W \to K^m$ mit $n = \dim V$ und $m = \dim W$ (nämlich Koordinatenabbildungen zu beliebigen Basen). Dann ist aber auch

$$V \times W \to K^n \times K^m \cong K^{n+m}, \ (x, x') \mapsto (f(x), g(x'))$$

ein Isomorphismus (mit Umkehrabbildung $(y, y') \mapsto (f^{-1}(y), g^{-1}(y'))$), und damit folgt aus Lemma 16.15

$$\dim(V \times W) = n + m = \dim V + \dim W.$$ □

Folgerung 16.18 (**Basisauswahl** und **Basisergänzung**)**.** *Es sei B eine Familie von n Vektoren in einem endlich-dimensionalen Vektorraum V.*

(a) *Ist $n = \dim V$ und B ein Erzeugendensystem von V oder linear unabhängig, so ist B bereits eine Basis von V.*

(b) *Ist B ein Erzeugendensystem von V, so ist $n \geq \dim V$, und man kann aus B eine Basis von V auswählen.*

Mit anderen Worten ist eine Basis von V dasselbe wie ein minimales *Erzeugendensystem von V.*

(c) *Ist B linear unabhängig, so ist $n \leq \dim V$, und man kann B mit geeigneten Vektoren einer fest gewählten Basis C zu einer Basis von V ergänzen.*

Mit anderen Worten ist eine Basis von V dasselbe wie eine maximale *linear unabhängige Familie in V.*

Beweis. Es seien $m = \dim V$ und $C = (y_1, \dots, y_m)$ eine Basis von V. Alle Aussagen der Folgerung ergeben sich direkt mit dem Isomorphismus $\Phi_C \colon V \to K^m$ aus den entsprechenden Aussagen für K^m in Bemerkung 16.7 (b) bzw. Folgerung 16.8.

Wir zeigen exemplarisch Teil (c): Es sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ linear unabhängig in V. Nach Lemma 16.15 (b) ist dann $(\Phi_C(x_1), \dots, \Phi_C(x_n))$ linear unabhängig in K^m. Nach Folgerung 16.8 (b) können wir diese Vektoren nun mit geeigneten Einheitsvektoren $e_{k_1}, \dots, e_{k_{m-n}}$ zu einer Basis von K^m ergänzen. Anwenden von Φ_C^{-1} auf diese Basis liefert dann wiederum nach Lemma 16.15 die Basis $\left(x_1, \dots, x_n, \Phi_C^{-1}(e_{k_1}), \dots, \Phi_C^{-1}(e_{k_{m-n}})\right) = (x_1, \dots, x_n, y_{k_1}, \dots, y_{k_{m-n}})$ von V. □

Folgerung 16.19. *Es sei U ein Unterraum eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V. Dann ist auch U endlich-dimensional, und es ist* $\dim U \le \dim V$.

Gilt sogar $\dim U = \dim V$, *so ist* $U = V$.

Beweis. Wir wählen wieder einen beliebigen Isomorphismus $f \colon V \to K^n$ mit $n = \dim V$. Dann ist $f(U)$ nach Lemma 15.20 (a) ein Unterraum von K^n, also nach Satz 15.9 endlich erzeugt. Nach Lemma 16.15 ist damit dann auch $f^{-1}(f(U)) = U$ endlich erzeugt.

Nach Folgerung 16.18 können wir damit eine Basis von U zu einer von V ergänzen. Damit folgt sofort $\dim U \le \dim V$, und im Fall der Gleichheit wird bei der Ergänzung kein zusätzlicher Vektor benötigt, so dass dann schon $U = V$ ist. □

Mit diesen Ergebnissen können wir nun schon viele Rechenmethoden von K^n auf beliebige endlich-dimensionale Vektorräume übertragen: z. B. die Bestimmung von Erzeugendensystemen und linearer Unabhängigkeit, die Basisauswahl und -ergänzung, oder die Berechnung von Durchschnitten und Summen von Unterräumen. Hier ist ein konkretes Beispiel dafür:

Beispiel 16.20. Im Vektorraum V aller reellen Polynome vom Grad höchstens 2 seien

$$U_1 = \operatorname{Lin}(1, x + x^2) \quad \text{und} \quad U_2 = \operatorname{Lin}(x + 2x^2, 1 + x + 3x^2).$$

Um mit diesen Unterräumen konkrete Berechnungen durchzuführen, können wir gemäß Beispiel 16.13 (c) die Basis $B = (1, x, x^2)$ von V wählen und die Koordinatenvektoren bezüglich B benutzen. Konkret sind diese Koordinatenvektoren der oben gegebenen Polynome die Vektoren

$$\Phi_B(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_B(x + x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \Phi_B(x + 2x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \Phi_B(1 + x + 3x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

in $\mathbb{R}^3$. Damit können wir z. B. berechnen:

(a) Da die ersten beiden Vektoren in $(*)$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^3$ sind, sind 1 und $x + x^2$ linear unabhängig in U_1, und damit eine Basis von U_1. Es ist also $\dim U_1 = 2$. Analog sieht man auch $\dim U_2 = 2$.

(b) Da die ersten beiden Vektoren in $(*)$ z. B. mit dem zweiten Einheitsvektor e_2 zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ ergänzt werden, ist $\left(1, x + x^2, \Phi_B^{-1}(e_2)\right) = (1, x + x^2, x)$ eine Basis von V.

(c) Um eine Basis des Durchschnitts $U_1 \cap U_2$ zu bestimmen, berechnen wir zunächst das Bild dieses Durchschnitts unter Φ_B. Diese Rechnung haben wir schon in Algorithmus 15.13 (a) durchgeführt: Es ist

$$\Phi_B(U_1) \cap \Phi_B(U_2) = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cap \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{Lin}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \subset \mathbb{R}^3.$$

Anwenden von Φ_B^{-1} liefert also $U_1 \cap U_2 = \operatorname{Lin}(1 - x - x^2)$; insbesondere hat $U_1 \cap U_2$ damit die Dimension 1.

16.C Lineare Abbildungen zwischen endlich erzeugten Vektorräumen

Wir wollen nun lineare Abbildungen zwischen endlich erzeugten Vektorräumen genauer untersuchen. Als Erstes übertragen wir dazu die Definition des Rangs mit Hilfe von Bemerkung 16.13 (b) von Matrizen auf Morphismen:

Definition 16.21 (Rang eines Morphismus)**.** Für eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen V und W heißt

$$\operatorname{rk} f := \dim \operatorname{Im} f \quad \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

der **Rang** von f.

Analog zum vorherigen Abschnitt können wir solche linearen Abbildungen für endlich erzeugte Vektorräume V und W nun mit Hilfe von Koordinatenabbildungen auf lineare Abbildungen zwischen K^n und K^m mit $n = \dim V$ und $m = \dim W$ zurückführen: Wollen wir eine lineare Abbildung $f\colon V \to W,\ x \mapsto f(x)$ beschreiben, so können wir stattdessen genauso gut Basen B und C von V bzw. W wählen und die zugehörige lineare Abbildung $K^n \to K^m$ betrachten, die den Koordinatenvektor $\Phi_B(x)$ auf $\Phi_C(f(x))$ abbildet. Dieser Morphismus lässt sich dann genau wie bisher durch Multiplikation mit einer Abbildungsmatrix erhalten.

Formal bedeutet dies einfach, dass wir Beispiel 15.18 (b) und den Satz 15.19 über Abbildungsmatrizen mehr oder weniger abschreiben können, wenn wir in den Matrixprodukten alle Vektoren (sowohl im Start- als auch im Zielraum) durch ihre Koordinatenvektoren ersetzen. Dies wollen wir nun machen und den so erhaltenen Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen $V \to W$ und Matrizen in $K^{m\times n}$ genauer untersuchen.

Konstruktion 16.22. Es seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume mit $n := \dim V$ und $m := \dim W$. Ferner seien B und C fest gewählte Basen von V bzw. W.

Zu jeder Matrix $A \in K^{m\times n}$ ist dann die Abbildung

$$f_A^{B,C}\colon V \to W,\ x \mapsto \Phi_C^{-1}(A \cdot \Phi_B(x))$$

(also mit $f(x) = \Phi_C^{-1}(A \cdot \Phi_B(x))$, d. h. $\Phi_C(f(x)) = A \cdot \Phi_B(x)$ für alle $x \in V$) als Verkettung linearer Abbildungen offensichtlich linear.

Satz und Definition 16.23 (Lineare Abbildungen $V \to W$ und Abbildungsmatrizen)**.** *Es seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume mit $n := \dim V$ und $m := \dim W$. Ferner wählen wir Basen $B = (x_1,\dots,x_n)$ und $C = (y_1,\dots,y_m)$ von V bzw. W.*

Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $f\colon V \to W$ genau eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ mit $f = f_A^{B,C}$ wie in Konstruktion 16.22, also mit

$$\Phi_C(f(x)) = A \cdot \Phi_B(x) \quad \text{für alle } x \in V,$$

*nämlich $A = (\,\Phi_C(f(x_1)) \mid \cdots \mid \Phi_C(f(x_n))\,)$. Wir nennen sie die **Abbildungsmatrix** von f bezüglich B und C und bezeichnen sie mit $A_f^{B,C}$.*

Beweis. Die geforderte Bedingung legt nach Beispiel 13.10 (d) für alle $j = 1,\dots,n$ die j-te Spalte von A fest zu

$$Ae_j = A \cdot \Phi_B(x_j) = \Phi_C(f(x_j)).$$

Damit ist A eindeutig bestimmt als $(\,\Phi_C(f(x_1)) \mid \cdots \mid \Phi_C(f(x_n))\,)$. Da f linear ist, folgt aus dieser Beziehung für die Einheitsvektoren aber auch für alle $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in V$ (mit $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$) mit Koordinatenvektor $\Phi_B(x) = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$

$$\begin{aligned}\Phi_C(f(x)) &= \Phi_C(f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)) = \lambda_1 \Phi_C(f(x_1)) + \cdots + \lambda_n \Phi_C(f(x_n))\\ &= \lambda_1 A e_1 + \cdots + \lambda_n A e_n = A \cdot \Phi_B(x).\end{aligned}$$ □

Bemerkung 16.24. Es seien wieder V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume der Dimensionen $n := \dim V$ und $m := \dim W$, sowie B und C Basen von V bzw. W.

(a) Ist bereits $V = K^n$ und $W = K^m$, und sind B und C die Standardbasen dieser Vektorräume, so sind die Koordinatenabbildungen Φ_B und Φ_C die Identität auf V bzw. W. Satz 16.23 stimmt dann also genau mit Satz 15.19 überein.

(b) Wie in Lemma 15.32 (b) zeigt man, dass die Abbildung $\operatorname{Hom}(V,W) \to K^{m\times n}$, $f \mapsto A_f^{B,C}$ ein Isomorphismus (mit Umkehrabbildung $K^{m\times n} \to \operatorname{Hom}(V,W)$, $A \mapsto f_A^{B,C}$) ist. Es ist also $\dim \operatorname{Hom}(V,W) = \dim K^{m\times n} = mn = \dim V \cdot \dim W$.

(c) Man kann sich die Satz 16.23 zugrunde liegende Idee auch an dem rechts dargestellten Diagramm verdeutlichen: In der oberen Zeile ist eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ dargestellt. Mit Hilfe der vertikal dargestellten Koordinatenabbildungen (die ja Isomorphismen sind, was durch die Schlangen am Beginn der Pfeile angedeutet werden soll) können wir daraus eine Abbildung $g = \Phi_C \circ f \circ \Phi_B^{-1}$ von K^n nach K^m konstruieren, indem wir im Diagramm „den Umweg über f nehmen“.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\wr"', "\Phi_B"'] & W \arrow[d, "\wr", "\Phi_C"] \\ K^n \arrow[r, "g"'] & K^m \end{tikzcd}$$

Dieser neue Morphismus $g\colon K^n \to K^m$ ist nun genau die am Anfang dieses Abschnitts beschriebene Abbildung, die für alle $x \in V$ den Koordinatenvektor von x auf den von $f(x)$ abbildet. Wir können sie mit einer gewöhnlichen Abbildungsmatrix A im Sinne von Satz 15.19 beschreiben; es ist also

$$g(v) = Av, \quad \text{d. h.} \quad \Phi_C(f(\Phi_B^{-1}(v))) = Av \quad \text{für alle } v \in K^n.$$

Mit der Substitution $v = \Phi_B(x)$ ist dies nun aber äquivalent zu

$$\Phi_C(f(x)) = A \cdot \Phi_B(x) \quad \text{für alle } x \in V,$$

also genau zu unserer Bedingung aus Satz 16.23.

(d) In der Situation von (c) lassen sich das Bild und der Kern von f leicht aus $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im} A$ bzw. $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Ker} A$ berechnen und sind damit auch rechnerisch schnell aus der Abbildungsmatrix $A = A_f^{B,C}$ zu bestimmen: Es ist

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} f = f(V) = \Phi_C^{-1}(g(\Phi_B(V))) = \Phi_C^{-1}(g(K^n)) = \Phi_C^{-1}(\operatorname{Im} g) \\ \text{und} \quad &\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\}) = \Phi_B^{-1}(g^{-1}(\Phi_C(\{0\}))) = \Phi_B^{-1}(g^{-1}(\{0\})) = \Phi_B^{-1}(\operatorname{Ker} g). \end{aligned}$$

Insbesondere ist damit $\operatorname{rk} f = \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} A \overset{16.13\,(b)}{=} \operatorname{rk} A$: Der Rang einer linearen Abbildung $f\colon V \to W$ ist gleich dem Rang seiner Abbildungsmatrix bezüglich beliebiger Basen von V und W. Außerdem erhalten wir so aus Folgerung 15.25 die analoge Aussage für solche linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} &f \text{ ist surjektiv} \;\Leftrightarrow\; g \text{ ist surjektiv} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rk} A = m \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rk} f = \dim W \\ \text{und} \quad &f \text{ ist injektiv} \;\Leftrightarrow\; g \text{ ist injektiv} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rk} A = n \;\Leftrightarrow\; \operatorname{rk} f = \dim V. \end{aligned}$$

Im Fall $V = W$ ist f also genau dann surjektiv, wenn f injektiv ist.

Beispiel 16.25. Es sei V der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad höchstens 2 mit der Basis $B = (1,x,x^2)$, und W der Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens 1 mit der Basis $C = (1,x)$ (siehe Beispiel 16.5 (c)). Wir betrachten wie in Beispiel 15.18 (e) die lineare Abbildung $f\colon V \to W$, $\varphi \mapsto \varphi'$, die einem Polynom seine Ableitung zuordnet.

(a) Um die Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ zu bestimmen, müssen wir nach Definition 16.23 die Basisvektoren von B abbilden und als Linearkombinationen der Basiselemente von C schreiben:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1' &&= 0 &&= 0\cdot 1 + 0\cdot x, \\ f(x) &= x' &&= 1 &&= 1\cdot 1 + 0\cdot x, \\ f(x^2) &= (x^2)' &&= 2x &&= 0\cdot 1 + 2\cdot x. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten dieser Linearkombinationen bilden also die Koordinatenvektoren von $f(1)$, $f(x)$ und $f(x^2)$; wir schreiben sie als Spalten in eine Matrix und erhalten

$$A_f^{B,C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Auch die umgekehrte Richtung, aus der Abbildungsmatrix die Abbildung zu rekonstruieren, ist nicht weiter schwierig, wenn man sich daran erinnert, dass die Matrix immer nur Koordinatenvektoren sieht. Angenommen, wir wollen $f(\varphi)$ für $\varphi = 2x^2 + 3x + 4$, also letztlich die Ableitung φ', nur aus der Kenntnis der Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ bestimmen. Dann brauchen wir zunächst den Koordinatenvektor $\Phi_B(\varphi)$ und können diesen dann an die Abbildungsmatrix multiplizieren: Wegen $\varphi = 4 \cdot 1 + 3 \cdot x + 2 \cdot x^2$ ist

$$\Phi_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{und damit} \quad A_f^{B,C} \cdot \Phi_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 16.23 ist dies nun der Koordinatenvektor $\Phi_C(f(\varphi))$ des Bildes $f(\varphi)$. Damit ist $f(\varphi) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot x = 4x + 3$ (was in der Tat die Ableitung von φ ist).

(c) Der Kern der Abbildungsmatrix aus (a) ist offensichtlich $\operatorname{Ker} A_f^{B,C} = \operatorname{Lin}(e_1)$. Nach Bemerkung 16.24 (d) ist also $\operatorname{Ker} f = \Phi_B^{-1}(\operatorname{Lin}(e_1)) = \operatorname{Lin}(1)$ der Unterraum, der vom konstanten Polynom 1 erzeugt wird, also genau der Unterraum aller konstanten Polynome. In der Tat sind dies natürlich auch genau die Polynome, deren Ableitung gleich 0 ist.

(d) Nach Bemerkung 16.24 (d) ist $\operatorname{rk} f = \operatorname{rk} A_f^{B,C} = 2$.

Nach Konstruktion hängen unsere gerade eingeführten Abbildungsmatrizen $A_f^{B,C}$ natürlich von der (letztlich willkürlichen) Wahl der Basen B und C im Start- bzw. Zielraum der Abbildung f ab. Wir wollen nun untersuchen, wie sich diese Abbildungsmatrizen ändern, wenn man zu anderen Basen übergeht. Dazu benötigen wir die sogenannten Basiswechselmatrizen, die letztlich ein Spezialfall von Abbildungsmatrizen sind.

Definition 16.26 (Basiswechselmatrizen)**.** Es seien $B = (x_1, \dots, x_n)$ und $B' = (x'_1, \dots, x'_n)$ zwei Basen eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V. Dann heißt die Abbildungsmatrix der Identität id_V bezüglich der Startbasis B' und Zielbasis B, nach Definition 16.23 also

$$A^{B',B} := A_{\mathrm{id}}^{B',B} = (\,\Phi_B(x'_1) \mid \cdots \mid \Phi_B(x'_n)\,) \quad \in K^{n \times n},$$

die **Basiswechselmatrix** von B' nach B.

Bemerkung 16.27. Es seien B und B' zwei Basen eines endlich-dimensionalen Vektorraums V.

(a) Offensichtlich ist stets $A^{B,B} = E$.

(b) Nach Satz 16.23 ist $A^{B',B}$ die eindeutig bestimmte Matrix mit $\Phi_B(x) = A^{B',B} \cdot \Phi_{B'}(x)$ für alle $x \in V$. Die Basiswechselmatrix wandelt also einfach nur einen Koordinatenvektor bezüglich B' in einen bezüglich B um – was auch ihren Namen erklärt.

Beispiel 16.28. Wollen wir für die beiden Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad B' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^2$ die Basiswechselmatrix $A^{B',B}$ bestimmen, so müssen wir die beiden Basisvektoren von B' nach Definition 16.26 als Linearkombination der Vektoren aus B schreiben: Es ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \quad 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten dieser Linearkombinationen bilden wieder die Koordinatenvektoren bezüglich B, wir schreiben sie also in die Spalten der gesuchten Matrix

$$A^{B',B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemma 16.29. *Es sei $B = (x_1,\dots,x_n)$ eine Basis eines endlich erzeugten Vektorraums V. Dann gilt:*

(a) *Für jede weitere Basis B' von V ist $A^{B',B}$ invertierbar mit $(A^{B',B})^{-1} = A^{B,B'}$.*

(b) *Für jede invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}(n,K)$ gibt es eine Basis B' von V mit $A^{B',B} = T$.*

(c) *Für jede invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}(n,K)$ gibt es eine Basis B' von V mit $A^{B,B'} = T$.*

Beweis.

(a) Nach Bemerkung 16.27 (b) ist $\Phi_B(x) = A^{B',B} \cdot \Phi_{B'}(x)$ und $\Phi_{B'}(x) = A^{B,B'} \cdot \Phi_B(x)$ für alle $x \in V$. Setzen wir dies ineinander ein, erhalten wir für alle $x \in V$

$$\Phi_B(x) = A^{B',B} \cdot A^{B,B'} \cdot \Phi_B(x).$$

Wiederum nach Bemerkung 16.27 (b) ist $A^{B',B} \cdot A^{B,B'}$ also die Basiswechselmatrix von B nach B, d. h. nach Bemerkung 16.27 (a) gilt $A^{B',B} \cdot A^{B,B'} = E$ und damit $(A^{B',B})^{-1} = A^{B,B'}$.

(b) Wir setzen $x_i' = \Phi_B^{-1}(Te_i)$ für $i = 1,\dots,n$. Da T invertierbar und Φ_B^{-1} ein Isomorphismus ist, ist auch $K^n \to V,\ x \mapsto \Phi_B^{-1}(Tx)$ ein Isomorphismus, und bildet nach Lemma 16.15 damit die Standardbasis $(e_1,\dots,e_n)$ auf eine Basis $B' := (x_1',\dots,x_n')$ von V ab.

Für $i = 1,\dots,n$ ist die i-te Spalte der Basiswechselmatrix $A^{B',B}$ nun nach Definition

$$\Phi_B(x_i') = \Phi_B(\Phi_B^{-1}(Te_i)) = Te_i,$$

also die i-te Spalte von T. Damit ist wie gewünscht $A^{B',B} = T$.

(c) Nach (b) gibt es eine Basis B' mit $A^{B',B} = T^{-1}$, nach (a) also mit $A^{B,B'} = T$. □

Mit diesen Basiswechselmatrizen können wir nun konkret angeben, wie sich Abbildungsmatrizen bei einem Basiswechsel transformieren.

Satz 16.30 (Verhalten von Abbildungsmatrizen unter Basiswechsel)**.** *Es sei $f\colon V \to W$ ein Morphismus zwischen endlich erzeugten Vektorräumen mit gegebenen Basen B bzw. C.*

(a) *Sind B' und C' zwei weitere Basen von V bzw. W, so gilt*

$$A_f^{B',C'} = A^{C,C'} \cdot A_f^{B,C} \cdot A^{B',B}.$$

(b) *Sind umgekehrt $S \in \mathrm{GL}(m,K)$ und $T \in \mathrm{GL}(n,K)$ zwei invertierbare Matrizen, so gibt es Basen B' und C' von V bzw. W, so dass $A^{C,C'} = S$ und $A^{B',B} = T$, und damit*

$$A_f^{B',C'} = S \cdot A_f^{B,C} \cdot T.$$

Beweis.

(a) Nach Definition 16.23 bzw. Bemerkung 16.27 (b) gilt

$$\begin{aligned} \Phi_{C'}(y) &= A^{C,C'} \cdot \Phi_C(y) && \text{für alle } y \in W, \\ \Phi_C(f(x)) &= A_f^{B,C} \cdot \Phi_B(x) && \text{für alle } x \in V, \\ \text{und} \qquad \Phi_B(x) &= A^{B',B} \cdot \Phi_{B'}(x) && \text{für alle } x \in V. \end{aligned}$$

Setzen wir dies für $y = f(x)$ ineinander ein, so erhalten wir

$$\Phi_{C'}(f(x)) = A^{C,C'} \cdot A_f^{B,C} \cdot A^{B',B} \cdot \Phi_{B'}(x) \quad \text{für alle } x \in V,$$

und damit nach Satz 16.23 wie gewünscht $A_f^{B',C'} = A^{C,C'} \cdot A_f^{B,C} \cdot A^{B',B}$.

(b) Nach Lemma 16.29 (b) und (c) existieren Basen B' und C' mit $A^{C,C'} = S$ und $A^{B',B} = T$; die behauptete Formel für die Abbildungsmatrix ergibt sich dann aus (a). □

Bemerkung 16.31 (Normalform von Abbildungsmatrizen)**.** Es seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume mit $n = \dim V$ und $m = \dim W$.

Nach Satz 16.30 (b) sind zwei Matrizen $A, A' \in K^{m \times n}$ genau dann eine Abbildungsmatrix für dieselbe Abbildung $f\colon V \to W$, nur bezüglich verschiedener Basen von V und W, wenn es $S \in \mathrm{GL}(m,K)$ und $T \in \mathrm{GL}(n,K)$ gibt mit $A' = SAT$ – also genau dann, wenn A und A' im Sinne von Definition 14.13 zueinander äquivalent sind.

Damit gibt es zum Normalformensatz 14.15 für Matrixäquivalenz auch eine Version für Morphismen: Zu jeder linearen Abbildung $f\colon V \to W$ gibt es Basen B und C von V bzw. W, so dass

$$A_f^{B,C} = \left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad \in K^{m \times n},$$

wobei nach Bemerkung 16.24 (d) dann $r = \operatorname{rk} f$ gilt. Analog zu Satz 14.15 nennt man dies auch die **Normalform** der Abbildungsmatrix von f. Wenn es uns also gerade nicht wichtig ist, welche Basen wir für V und W verwenden, können wir stets annehmen, dass die Abbildungsmatrix von f eine solche Normalform hat.