15. Vektorräume

In den letzten beiden Kapiteln haben wir ausführlich die Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme untersucht – und dabei sowohl theoretische Ergebnisse über ihre Struktur bewiesen als auch Verfahren für ihre Berechnung entwickelt. Dafür hat es sich als praktisch erwiesen, die Sprache der Vektoren in K^m bzw. Matrizen in $K^{m \times n}$ (mit $m, n \in \mathbb{N}$) zu benutzen.

Wie schon in Bemerkung 13.6 erwähnt ist der Begriff des Vektors in der Mathematik jedoch viel allgemeiner. Analog zu Gruppen und Körpern in Kapitel 3.A werden Vektoren nämlich eigentlich über die mit ihnen möglichen Rechenoperationen definiert: Während es in einer Gruppe *eine* Verknüpfung und in einem Körper *zwei* Verknüpfungen „$+$“ und „$\cdot$“ mit den erwarteten Eigenschaften gibt (siehe Definition 3.1 und 3.5), sind es für Vektoren eine Addition und eine Skalarmultiplikation mit Elementen eines fest gewählten Grundkörpers K. Die bisher betrachteten Vektoren in K^m (und auch Matrizen) erlauben diese Rechenoperationen natürlich wie in Definition 13.3, aber viele andere Objekte auch: So können wir z. B. auch reelle Funktionen (punktweise) addieren und mit einer reellen Zahl multiplizieren. In diesem Sinne können wir also auch solche Funktionen als Vektoren bezeichnen, bzw. sie als Elemente eines sogenannten Vektorraums auffassen.

Der Vorteil dieses viel allgemeineren Vektorbegriffs liegt auf der Hand: Auf diese Art können wir die Ergebnisse, die wir über Vektoren (also nur aus der Existenz einer Vektoraddition und Skalarmultiplikation) herleiten können, in viel mehr Fällen anwenden. In der Tat ist die Untersuchung allgemeiner Vektorräume, mit der wir jetzt beginnen wollen, das eigentliche Ziel der linearen Algebra. Unsere Resultate der letzten beiden Kapitel werden uns helfen, zu den dabei eingeführten theoretischen Konzepten auch gleich viele Beispiele betrachten und konkret berechnen zu können.

15.A Der Vektorraumbegriff

Wie oben schon erwähnt wollen wir Vektoren über die Existenz einer Addition und Skalarmultiplikation definieren. Diese beiden Rechenoperationen sollen dabei natürlich gewisse erwartete Eigenschaften erfüllen – und zwar genau die, die wir für Vektoren in K^m und Matrizen in $K^{m \times n}$ in Lemma 13.5 bereits gesehen hatten:

Definition 15.1 (Vektorräume)**.** Es sei K ein Körper. Ein **Vektorraum** über K (oder K-Vektorraum) ist eine Menge V zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$\begin{aligned} &+ : V \times V \to V \quad (\textit{Vektoraddition}) \\ \text{und} \quad &\cdot : K \times V \to V \quad (\textit{Skalarmultiplikation}), \end{aligned}$$

so dass gilt:

(a) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe (siehe Definition 3.1).

(b) (1. Distributivität) Für alle $\lambda, \mu \in K$ und $x \in V$ gilt $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.

(c) (2. Distributivität) Für alle $\lambda \in K$ und $x, y \in V$ gilt $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.

(d) (Assoziativität) Für alle $\lambda, \mu \in K$ und $x \in V$ gilt $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$.

(e) Für alle $x \in V$ gilt $1 \cdot x = x$.

Die Elemente von V heißen **Vektoren**, die Elemente von K **Skalare**.

Bemerkung 15.2.

(a) Beachte, dass man einen Vektorraum nur dann definieren kann, wenn man vorher einen Körper K gewählt hat. Wenn klar ist, welcher Körper gemeint ist, werden wir jedoch auch oft nur von einem Vektorraum (statt einem K-Vektorraum) sprechen.

(b) Wie wir es auch in den letzten beiden Kapiteln schon getan haben, haben wir in Definition 15.1 mehrfach die gleichen Symbole für unterschiedliche Dinge verwendet: Es gibt z. B. zwei Additionen, die wir beide mit „+“ bezeichnet haben, nämlich die Addition $+\colon K\times K\to K$ zweier Körperelemente und die Addition $+\colon V\times V\to V$ der Vektoren. Da man aus der Art der verknüpften Elemente eindeutig ablesen kann, um welche Verknüpfung es sich handeln muss, können dadurch aber keine Mehrdeutigkeiten entstehen: So werden z. B. beim ersten Pluszeichen in Definition 15.1 (b) zwei Skalare, beim zweiten jedoch zwei Vektoren addiert. Nur wenn wir auch in der Notation explizit deutlich machen wollen, um welche der beiden Verknüpfungen es sich handelt, schreiben wir diese als $+_K$ bzw. $+_V$. Analog gibt es auch die Multiplikation zweimal, einmal als Multiplikation $\cdot_K$ in K und einmal als Skalarmultiplikation $\cdot_V$, und auch zweimal die Null, nämlich einmal als Null 0_K im Körper K und einmal als *Nullvektor* 0_V, d. h. als das neutrale Element von $(V,+)$. In dieser ausführlichen Notation könnte man z. B. die Bedingung aus Definition 15.1 (b) als

$$(\lambda +_K \mu)\cdot_V x = \lambda \cdot_V x +_V \mu \cdot_V x$$

schreiben. In der Regel werden wir diese Indizes K und V jedoch weglassen, genauso wie die Malzeichen sowohl für $\cdot_K$ als auch für $\cdot_V$.

Beispiel 15.3.

(a) Für jeden Körper K ist $V=\{0\}$ (mit den trivialen Verknüpfungen) ein K-Vektorraum, der sogenannte **Nullvektorraum**.

(b) Für alle $m,n\in\mathbb{N}$ ist der Raum $K^{m\times n}$ aller $m\times n$-Matrizen über K nach Lemma 13.5 ein K-Vektorraum. Insbesondere ist damit auch der Raum K^m, dessen Elemente wir bisher als Vektoren bezeichnet haben, ein Vektorraum. Unser neuer Vektorbegriff ist also eine Verallgemeinerung der vorläufigen Notation 13.2.

Auch mit dem neuen Vektorbegriff bleiben die Vektorräume K^m für $m\in\mathbb{N}$ sicher die wichtigsten Beispiele für K-Vektorräume; wir werden sie also auch in Zukunft weiterhin oft als Beispiele betrachten. Im Fall $m=1$ erhält man daraus $K^1=K$, also K selbst als K-Vektorraum; der Fall $m=0$ wird konventionsgemäß als der Nullvektorraum $K^0=\{0\}$ aufgefasst.

(c) Sind V und W zwei K-Vektorräume, so ist auch ihr Produkt $V\times W$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation ein K-Vektorraum – der Nachweis der Vektorraumeigenschaften ist analog zum bereits bekannten Spezialfall $K^2=K\times K$ (siehe Lemma 13.5). Genauso sind natürlich auch Produkte von mehr als zwei Vektorräumen wieder ein Vektorraum.

(d) Es seien K ein Körper und M eine Menge. Dann ist die Menge $\mathrm{Abb}(M,K):=\{f\colon M\to K\}$ aller Abbildungen von M nach K ein K-Vektorraum, indem wir Addition und Multiplikation punktweise definieren als

$$(f+g)(x):=f(x)+g(x) \quad \text{und} \quad (\lambda f)(x):=\lambda f(x)$$

für alle $\lambda\in K$, $x\in M$ und $f,g\colon M\to K$. In der Tat haben wir in Aufgabe 3.12 (a) bereits gesehen, dass $\mathrm{Abb}(M,K)$ eine abelsche Gruppe ist (der Nullvektor ist hierbei die Funktion, die jedes Element von M auf 0 abbildet, und das zu einer Funktion $f\colon M\to K$ additive Inverse die Funktion $-f\colon M\to K$, $x\mapsto -f(x)$). Die anderen Vektorraumeigenschaften zeigt man wieder analog.

Ein Spezialfall hiervon ist der Raum $\mathrm{Abb}(\mathbb{N},K)$, dessen Elemente $f\in\mathrm{Abb}(\mathbb{N},K)$ wir in Verallgemeinerung von (b) als „unendliche Folgen“ $(f(0),f(1),f(2),\dots)$ mit Elementen in K schreiben können. Im Fall $K=\mathbb{R}$ sind dies gerade die in der Analysis betrachteten reellen Zahlenfolgen.

Darüber hinaus lässt sich auf die gleiche Art auch die Menge $\mathrm{Abb}(M,W)$ aller Abbildungen von einer beliebigen Menge M in einen K-Vektorraum W zu einem Vektorraum machen.

(e) Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden einen $\mathbb{Q}$-Vektorraum. In der Tat kann man reelle Zahlen addieren und mit einer rationalen multiplizieren, und es ist klar, dass mit diesen Definitionen alle Vektorraumeigenschaften gelten.

Analog zum Fall von Gruppen und Körpern wollen wir auch hier zunächst ein paar elementare Eigenschaften von Vektorräumen zeigen. Sie haben einen ähnlichen Charakter wie die Axiome in Definition 15.1, folgen aber bereits aus diesen (so dass man sie nicht separat fordern muss).

Lemma 15.4 (Eigenschaften von Vektorräumen)**.** *In jedem K-Vektorraum V gilt für alle $\lambda \in K$ und $x \in V$:*

(a) $0_K \cdot x = \lambda \cdot 0_V = 0_V$.

(b) *Ist $\lambda \cdot x = 0_V$, so ist $\lambda = 0_K$ oder $x = 0_V$.*

(c) $(-1) \cdot x = -x$.

Beweis.

(a) Der Beweis ist ganz analog zu dem von Lemma 3.8 (a): Wegen der 1. Distributivität aus Definition 15.1 (b) gilt $0_K \cdot x = (0_K + 0_K) \cdot x = 0_K \cdot x + 0_K \cdot x$, nach Subtraktion von $0_K \cdot x$ also wie behauptet $0_V = 0_K \cdot x$. Analog zeigt man $0_V = \lambda \cdot 0_V$ mit Hilfe der 2. Distributivität.

(b) Ist $\lambda x = 0_V$ und $\lambda \neq 0_K$, so folgt

$$\begin{aligned} x &= 1 \cdot x && \text{(Definition 15.1 (e))} \\ &= (\lambda^{-1} \cdot \lambda) x \\ &= \lambda^{-1} (\lambda x) && \text{(Definition 15.1 (d))} \\ &= 0_V && \text{(Teil (a)).} \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} (-1) \cdot x + x &= (-1) \cdot x + 1 \cdot x && \text{(Definition 15.1 (e))} \\ &= (-1+1) \cdot x && \text{(Definition 15.1 (b))} \\ &= 0_K \cdot x = 0_V && \text{(Teil (a)),} \end{aligned}$$

also ist $(-1) \cdot x$ das additive Inverse zu x. □

15.B Untervektorräume

Immer wenn man eine neue mathematische Struktur (wie z. B. Gruppen, Körper, oder jetzt hier die Vektorräume) einführt, sollte man als Erstes zwei Dinge untersuchen:

- die sogenannten *Unterstrukturen*, d. h. Teilmengen, die selbst wieder die betrachtete Struktur haben; und
- die sogenannten *Morphismen*, d. h. Abbildungen, die diese Struktur erhalten.

Wir haben dies in Kapitel **??** nur deswegen für Gruppen und Körper nicht getan, weil wir in dieser Vorlesung nur Vektorräume, aber nicht Gruppen und Körper ausführlich studieren wollen. Diejenigen von euch, die auch die Vorlesung „Algebraische Strukturen" hören, haben dort aber sicher schon z. B. Untergruppen und Morphismen von Gruppen untersucht – und werden jetzt feststellen, dass sich Untervektorräume und Morphismen von Vektorräumen, die wir nun studieren wollen, in vielen Aspekten sehr ähnlich verhalten.

Wir beginnen dabei mit den Untervektorräumen, durch die wir gleichzeitig auch sehr viele neue Beispiele von Vektorräumen erhalten. Morphismen werden wir danach in Abschnitt **??** untersuchen.

Definition 15.5 (Untervektorräume)**.** Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt **Untervektorraum** oder **Unterraum** von V, in Zeichen $U \leq V$, wenn „U mit den Verknüpfungen in V selbst wieder ein Vektorraum ist", d.h. wenn gilt:

(a) Für alle $x, y \in U$ und $\lambda \in K$ gilt auch $x + y \in U$ und $\lambda x \in U$ (d. h. die Addition und Skalarmultiplikation in V lassen sich auf U einschränken).

(b) U ist mit diesen eingeschränkten Verknüpfungen selbst ein K-Vektorraum.

Man sagt für (a) auch, dass U bezüglich der Vektoraddition und Skalarmultiplikation *abgeschlossen* ist. Beachte, dass diese Bedingung notwendig ist, um (b) überhaupt formulieren zu können, weil wir sonst ja gar keine Verknüpfungen auf U hätten.

Da das Nachprüfen der vielen Vektorraumaxiome in Definition 15.1 in der Praxis natürlich sehr aufwändig ist, sieht es vielleicht so aus, als ob das Nachprüfen der Unterraumeigenschaft (b) genauso aufwändig ist. Glücklicherweise ist dies jedoch nicht so: Wir wollen jetzt zeigen, dass sich praktisch alle Vektorraumaxiome von V direkt auf U übertragen, so dass man fast nur die Abgeschlossenheit in (a) nachprüfen muss.

Satz 15.6 (**Unterraumkriterium**). *Eine Teilmenge U eines K-Vektorraums V ist genau dann ein Unterraum von V, wenn gilt:*

(a) *Für alle $x,y \in U$ und $\lambda \in K$ gilt auch $x+y \in U$ und $\lambda x \in U$.*

(b) $U \neq \emptyset$.

Beweis. Da die Abgeschlossenheit (a) in Definition 15.5 und Satz 15.6 dieselbe Bedingung ist, müssen wir nur unter dieser Bedingung die Äquivalenz der Eigenschaften (b) überprüfen.

„$\Rightarrow$“: Ist U ein Vektorraum, so enthält U natürlich den Nullvektor und ist damit nicht leer.

„$\Leftarrow$“: Es sei nun $U \neq \emptyset$. Wir müssen die Vektorraumaxiome für U überprüfen.

- Assoziativität der Vektoraddition: Weil V ein Vektorraum ist, gilt $(x+y)+z = x+(y+z)$ für alle $x,y,z \in V$ und damit erst recht für alle $x,y,z \in U$. Die Assoziativität der Addition überträgt sich also direkt von V auf U.
- Additives neutrales Element: Nach Voraussetzung gibt es ein Element $x \in U$. Damit ist nach der Abgeschlossenheit der Skalarmultiplikation auch $0 = 0 \cdot x \in U$, und für diesen Nullvektor gilt natürlich $x+0 = 0+x = x$ für alle $x \in U$ (denn dies gilt ja sogar für alle $x \in V$).
- Additive inverse Elemente: Für jedes $x \in U$ ist wegen der Abgeschlossenheit der Skalarmultiplikation auch $(-1) \cdot x \in U$, und dies ist nach Lemma 15.4 (c) genau das additive inverse Element zu x.

Also ist $(U,+)$ schon einmal eine Gruppe. Die übrigen Axiome (also die Kommutativität der Vektoraddition und die Bedingungen (b) bis (e) aus Definition 15.1) sind aber alle von der Form, dass für alle Vektoren aus U eine bestimmte Gleichung gelten muss – und dies folgt nun genauso wie die Assoziativität oben sofort daraus, dass diese Gleichungen sogar für alle Vektoren aus V gelten. □

Bemerkung 15.7. Wie wir im Beweis von Satz 15.6 schon gesehen haben, muss jeder Unterraum U eines Vektorraums V den Nullvektor enthalten: Wegen $U \neq \emptyset$ gibt es ein $x \in U$, und aus der Abgeschlossenheit der Skalarmultiplikation folgt dann auch $0 = 0 \cdot x \in U$.

Die Bedingung $U \neq \emptyset$ in Satz 15.6 (b) ist also äquivalent zu $0 \in U$.

Beispiel 15.8.

(a) Für jeden Vektorraum V sind der Nullvektorraum $\{0\} \subset V$ und der gesamte Raum $V \subset V$ natürlich stets Unterräume von V. Sie werden die **trivialen Unterräume** von V genannt.

(b) Für alle $m,n \in \mathbb{N}$ und gegebene Vektoren $x_1,\dots,x_n \in K^m$ ist die Menge $\mathrm{Lin}(x_1,\dots,x_n)$ aller ihrer Linearkombinationen ein Unterraum von K^m: Sind nämlich

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \quad \text{und} \quad y = \tilde{\lambda}_1 x_1 + \cdots + \tilde{\lambda}_n x_n$$

solche Linearkombinationen und $\lambda \in K$, so sind auch

$$x+y = (\lambda_1 + \tilde{\lambda}_1)x_1 + \cdots + (\lambda_n + \tilde{\lambda}_n)x_n \quad \text{und} \quad \lambda x = (\lambda\lambda_1)x_1 + \cdots + (\lambda\lambda_n)x_n$$

in $\mathrm{Lin}(x_1,\dots,x_n)$. Außerdem ist diese Menge nicht leer, da sie natürlich (konventionsgemäß auch für $n = 0$) den Nullvektor enthält. Damit ist $\mathrm{Lin}(x_1,\dots,x_n)$ nach Satz 15.6 ein Unterraum von K^m. Man nennt ihn den von $x_1,\dots,x_n$ **erzeugten** oder **aufgespannten Unterraum** von K^m.

Insbesondere gilt damit $\operatorname{Im} A \leq K^m$ und $\operatorname{Ker} A \leq K^n$ für jede Matrix $A \in K^{m \times n}$, da Bild und Kern einer Matrix nach Definition 14.21 (a) bzw. Satz 14.25 (a) eine solche Darstellung als Menge aller Linearkombinationen bestimmter Vektoren besitzen.

(c) Für $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$ betrachten wir die Lösungsmenge $L(A,b) \subset K^n$ des linearen Gleichungssystems $Ax = b$:

- Für $b = 0$ ist $L(A,0) = \operatorname{Ker} A$ nach (b) ein Unterraum.
- Für $b \neq 0$ dagegen ist $L(A,b)$ nach Bemerkung 15.7 niemals ein Unterraum, denn dann gilt ja $0 \notin L(A,b)$ wegen $A \cdot 0 = 0 \neq b$.

  In der Tat ist die Lösungsmenge – sofern sie nicht leer ist – dann nach Satz 14.25 (c) von der Form $v + \operatorname{Ker} A$ für ein $v \in K^n$ und damit ein *verschobener Unterraum*. Manchmal wird eine solche Menge in der Literatur auch als *affiner Unterraum* bezeichnet.

Als konkretes Beispiel können wir eine Matrix $A = (a_1 \;\; a_2) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ vom Rang 1 (d. h. $A \neq 0$) wählen. Dann ist wie im Bild unten der Unterraum

$$U_1 := \operatorname{Ker} A = \{x \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0\}$$

(wobei x_1 und x_2 die Koordinaten von x bezeichnen) eine Ursprungsgerade, während für ein $b \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ die Gerade

$$U_2 := L(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^2 : a_1 x_1 + a_2 x_2 = b\}$$

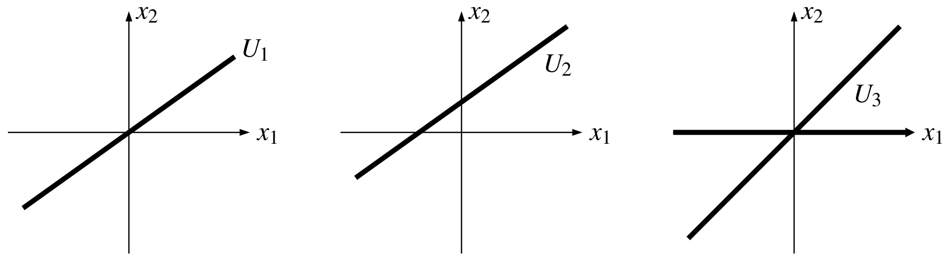
nicht durch den Ursprung läuft und damit kein Unterraum ist. Auch eine Vereinigung von zwei Ursprungsgeraden wie z. B.

$$U_3 := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0 \text{ oder } x_1 - x_2 = 0\}$$

ist kein Unterraum, denn hier ist z. B. wegen

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_3 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_3, \quad \text{aber} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U_3$$

die Abgeschlossenheit der Vektoraddition nicht erfüllt.



$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 = m x_1 \right\} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 = m x_1 + 1 \right\} \qquad \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_2 = x_1 \text{ oder } x_2 = 0 \right\}$$

Beachte, dass man hier nicht nur an den Rechnungen, sondern auch an den Bildern oben schon sehen kann, ob die gegebenen Teilmengen abgeschlossen bezüglich Vektoraddition und Skalarmultiplikation, also ob sie Untervektorräume sind.

(d) Eine quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt *symmetrisch*, wenn $A^\mathsf{T} = A$, also $a_{i,j} = a_{j,i}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ gilt. Mit dieser Definition ist die Teilmenge

$$U := \{A \in K^{n \times n} : A \text{ ist symmetrisch}\}$$

aller symmetrischen Matrizen ein Unterraum von $K^{n \times n}$: Es ist $0 \in U$, und für alle $A, B \in U$ (also $A^\mathsf{T} = A$ und $B^\mathsf{T} = B$) und $\lambda \in K$ gilt nach Lemma 13.7

$$(A+B)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} + B^\mathsf{T} = A + B \quad \text{und} \quad (\lambda A)^\mathsf{T} = \lambda (A^\mathsf{T}) = \lambda A,$$

also $A + B \in U$ und $\lambda A \in U$.

(e) Für eine gegebene Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$ ist die Teilmenge $U \subset \text{Abb}(D,\mathbb{R})$ aller Polynomfunktionen $f: D \to \mathbb{R}$ ein Unterraum des Vektorraums $\text{Abb}(D,\mathbb{R})$ aus Beispiel 15.3 (d), denn mit f und g sind auch $f+g$ und λf für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ Polynomfunktionen. Genauso ist für festes $k \in \mathbb{N}$ auch die Menge aller Polynomfunktionen vom Grad höchstens k ein Unterraum von $\text{Abb}(D,\mathbb{R})$.

Im Fall des Vektorraums K^m können wir in der Tat sogar zeigen, dass *jeder* Unterraum die Form wie in Beispiel 15.3 (b) hat, also von endlich vielen Vektoren erzeugt werden kann – und zwar sogar von linear unabhängigen:

Satz 15.9 (Unterräume von K^n)**.** *Jeder Unterraum $U \leq K^m$ kann als $U = \text{Lin}(x_1,\dots,x_n)$ für linear unabhängige Vektoren $x_1,\dots,x_n \in K^m$ mit $n \in \mathbb{N}$ geschrieben werden.*

Beweis. Angenommen, es gäbe einen Unterraum $U \leq K^m$, der nicht auf diese Art geschrieben werden kann. Wir könnten dann wie folgt rekursiv unendlich viele linear unabhängige Vektoren $x_1,x_2,x_3,\dots$ in U konstruieren:

Sind linear unabhängige $x_1,\dots,x_n \in U$ für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits konstruiert, so gilt wegen der Abgeschlossenheit von U zunächst einmal auch $\text{Lin}(x_1,\dots,x_n) \subset U$. Nach unserer Annahme kann aber nicht $U = \text{Lin}(x_1,\dots,x_n)$ gelten, also gibt es ein $x_{n+1} \in U \backslash \text{Lin}(x_1,\dots,x_n)$. Dann sind aber auch $x_1,\dots,x_{n+1}$ linear unabhängig: Sind nämlich $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1} \in K$ mit

$$\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_{n+1} x_{n+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{n+1} x_{n+1} = -\lambda_1 x_1 - \cdots - \lambda_n x_n \in \text{Lin}(x_1,\dots,x_n),$$

so folgt wegen $x_{n+1} \notin \text{Lin}(x_1,\dots,x_n)$ zunächst $\lambda_{n+1} = 0$, und wegen der linearen Unabhängigkeit von $x_1,\dots,x_n$ dann auch $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

Auf diese Art könnten wir also beliebig viele linear unabhängige Vektoren in U finden – was natürlich ein Widerspruch ist, da in K^m nach Folgerung 14.30 (b) höchstens m Vektoren linear unabhängig sein können. □

Bemerkung 15.10 (Berechnung von Unterräumen von K^m)**.** Wenn wir im Folgenden sagen, dass wir einen Unterraum von K^m *berechnen* wollen, meinen wir damit, ihn so darzustellen wie in Satz 15.9 – also linear unabhängige Vektoren zu bestimmen, die ihn erzeugen (beachte dabei, dass solche Erzeuger natürlich nicht eindeutig bestimmt sind, denn es ist ja z. B. $\text{Lin}(e_1) = \text{Lin}(2e_1)$).

Für alle in Beispiel 15.8 (b) erwähnten Unterräume können wir dies leicht durchführen:

(a) Ist der Unterraum gegeben als $\text{Lin}(x_1,\dots,x_n)$ mit nicht notwendig linear unabhängigen $x_1,\dots,x_n$, so können wir aus diesen Vektoren mit Folgerung 14.31 **??** linear unabhängige Erzeuger auswählen.

(b) Ist der Unterraum gegeben als Bild einer Matrix $A = (x_1 \,|\, \cdots \,|\, x_n) \in K^{m \times n}$, so können wir wegen $\text{Im}\, A = \text{Lin}(x_1,\dots,x_n)$ genauso vorgehen.

(c) Ist der Unterraum gegeben als Kern einer Matrix, so liefert Satz 14.25 (a) sofort die gewünschte Darstellung.

Darüber hinaus haben wir in Aufgabe **??** gesehen, dass wir auch umgekehrt einen Unterraum der Form $\text{Lin}(x_1,\dots,x_n)$ von K^m – nach Satz 15.9 also jeden Unterraum – immer als Kern einer Matrix A schreiben können. Dies liefert eine alternative Art der Darstellung beliebiger Unterräume von K^m, nämlich durch definierende Gleichungen $\{x \in K^m : Ax = 0\}$ statt durch erzeugende Vektoren $\{x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n : \lambda_1,\dots,\lambda_n \in K\}$. Für konkrete Rechnungen mit Unterräumen kann jeweils die eine oder andere Darstellung besser geeignet sein.

Wir wollen nun sehen, wie man aus mehreren Unterräumen eines Vektorraums neue Unterräume konstruieren kann. Eine Möglichkeit besteht dabei einfach darin, ihren Durchschnitt zu bilden. Im Gegensatz dazu ist ihre Vereinigung nach Beispiel 15.8 (c) zwar in der Regel kein Unterraum; es gibt aber trotzdem eine Möglichkeit, aus ihnen einen neuen zu erzeugen, der sie enthält – die korrekte Konstruktion hierfür ist nur nicht die Vereinigung, sondern die sogenannte Summe von Unterräumen.

Lemma 15.11 (Durchschnitt und Summe von Unterräumen)**.** *Es seien U_1 und U_2 Unterräume eines Vektorraums V. Dann gilt:*

(a) *Der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ ist ebenfalls ein Unterraum von V.*

(b) *Die **Summe** $U_1 + U_2 := \{x_1 + x_2 : x_1 \in U_1, x_2 \in U_2\}$ ist ebenfalls ein Unterraum von V.*

Analog gilt dies auch für Durchschnitte $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ und Summen $U_1 + \cdots + U_n$ von mehr als zwei Unterräumen.

Beweis. Wir überprüfen jeweils das Unterraumkriterium aus Satz 15.6. Beachte dabei zunächst, dass der Nullvektor nach Bemerkung 15.7 sowohl in U_1 als auch in U_2 liegt, und damit auch in $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$. Wir müssen also nur noch die Abgeschlossenheit zeigen.

(a) Es seien $\lambda \in K$ und $x, y \in U_1 \cap U_2$, also $x, y \in U_1$ und $x, y \in U_2$. Da U_1 und U_2 Unterräume sind, liegen damit sowohl $x + y$ als auch λx in U_1 und U_2, d. h. in $U_1 + U_2$.

(b) Es seien $\lambda \in K$ und $x, y \in U_1 + U_2$, also $x = x_1 + x_2$ und $y = y_1 + y_2$ mit $x_1, y_1 \in U_1$ und $x_2, y_2 \in U_2$. Dann gilt wegen der Abgeschlossenheit von U_1 und U_2

$$x + y = x_1 + x_2 + y_1 + y_2 = \underbrace{(x_1 + y_1)}_{\in U_1} + \underbrace{(x_2 + y_2)}_{\in U_2} \in U_1 + U_2,$$

und analog auch

$$\lambda x = \lambda(x_1 + x_2) = \underbrace{\lambda x_1}_{\in U_1} + \underbrace{\lambda x_2}_{\in U_2} \in U_1 + U_2. \qquad \square$$

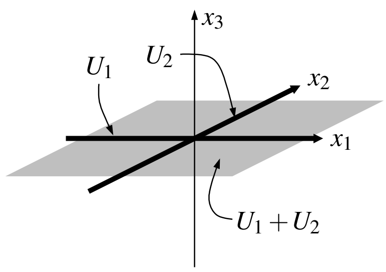
Beispiel 15.12. Für die Unterräume

$$U_1 = \mathrm{Lin}(e_1) \quad \text{und} \quad U_2 = \mathrm{Lin}(e_2)$$

von $\mathbb{R}^3$ ist ihr Durchschnitt natürlich gleich $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, und ihre Summe wie im Bild rechts dargestellt die (x_1, x_2)-Ebene

$$U_1 + U_2 = \mathrm{Lin}(e_1, e_2).$$

Aber auch für beliebige Unterräume von K^m können wir ihren Durchschnitt und ihre Summe mit unseren Methoden aus Kapitel 14 konkret berechnen:



Algorithmus 15.13 (Berechnung von Durchschnitten und Summen in K^m)**.** Es seien U_1 und U_2 zwei Unterräume von K^m, die wir nach Satz 15.9 als $U_1 = \mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_k)$ und $U_2 = \mathrm{Lin}(y_1, \dots, y_l)$ schreiben können. Die gewählten Erzeuger müssen dabei im Folgenden nicht linear unabhängig sein.

(a) Die Vektoren im Schnitt $U_1 \cap U_2$ erhält man offensichtlich durch Gleichsetzen

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = -\mu_1 y_1 - \cdots - \mu_l y_l \tag{1}$$

der Elemente von U_1 und U_2, und damit durch Auflösen des linearen Gleichungssystems

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k + \mu_1 y_1 + \cdots + \mu_l y_l = 0 \tag{2}$$

(die Vorzeichen spielen hierbei keine Rolle, da mit $y \in U_2$ auch $-y \in U_2$ liegt, und sind daher so gewählt, dass sie sich im resultierenden Gleichungssystem wegheben). Die sich als Lösung ergebenden Werte für $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ können dann in die linke Seite von (1) eingesetzt werden und liefern die gesuchten Vektoren im Schnitt.

Als konkretes Beispiel betrachten wir die Unterräume

$$U_1 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad U_2 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right)$$

von $\mathbb{R}^3$. Der Ansatz (2) führt zum folgenden Gleichungssystem in $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{Z3-Z2\to Z3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{Z2-Z3\to Z2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Der Lösungsraum dieses Gleichungssystems wird also (z. B. nach Bemerkung 14.26 (a)) von $(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) = (1, -1, 2, -1)$ erzeugt. Einsetzen von λ_1 und λ_2 (oder alternativ μ_1 und μ_2) in (1) zeigt also, dass $U_1 \cap U_2$ erzeugt wird von

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Sind die Unterräume dagegen wie in Bemerkung 15.10 (c) als Kerne von Matrizen

$$U_1 = \operatorname{Ker} A_1 = \{x \in K^m : A_1 x = 0\} \quad \text{und} \quad U_2 = \operatorname{Ker} A_2 = \{x \in K^m : A_2 x = 0\}$$

gegeben, so können wir ihren Durchschnitt offensichtlich sofort hinschreiben als

$$U_1 \cap U_2 = \{x \in K^m : A_1 x = A_2 x = 0\} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} A_1 \\ \hline A_2 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Summe $U_1 + U_2$ ist nach Definition natürlich gegeben durch die Linearkombinationen aller Erzeuger zusammen; es gilt also

$$U_1 + U_2 = \operatorname{Lin}(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l).$$

Beachte dabei, dass die Vektoren $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l$ nicht zusammen linear unabhängig sein müssen – wenn linear unabhängige Erzeuger gesucht sind, müssen wir hierauf noch das Verfahren aus Bemerkung 15.10 (a) anwenden.

Aufgabe 15.14. Es seien U_1 und U_2 Unterräume eines K-Vektorraums V. Zeige, dass $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Unterraum von V ist, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$.

Aufgabe 15.15. Es seien

$$\begin{aligned} & U_1 = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \\ \text{und} \quad & U_2 = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

in $\operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Mengen aller sogenannten geraden bzw. ungeraden Funktionen. Man zeige:

(a) U_1 und U_2 sind Unterräume von $\operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und $U_1 + U_2 = \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

15.C Lineare Abbildungen

Wie schon am Anfang des letzten Abschnitts angekündigt, wollen wir uns nun mit Abbildungen zwischen Vektorräumen beschäftigen, die mit der Vektorraumstruktur verträglich sind.

Definition 15.16 (Lineare Abbildungen bzw. Morphismen)**.** Es seien V und W zwei Vektorräume über demselben Grundkörper K. Man nennt eine Abbildung $f \colon V \to W$ eine **lineare Abbildung** (oder **Morphismus** oder **(Vektorraum-)Homomorphismus**), wenn für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in K$ gilt, dass

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) \quad &&(\text{„}f \text{ ist verträglich mit der Vektoraddition“}) \\ \text{und} \quad f(\lambda x) &= \lambda f(x) \quad &&(\text{„}f \text{ ist verträglich mit der Skalarmultiplikation“}). \end{aligned}$$

Die Menge aller solchen Morphismen mit Startraum V und Zielraum W wird mit $\operatorname{Hom}_K(V, W)$ bezeichnet (oder auch nur mit $\operatorname{Hom}(V, W)$, wenn der Grundkörper aus dem Zusammenhang klar ist).

Ist $V = K^n$, so schreiben wir statt $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$ der Einfachheit halber oft nur $f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Bemerkung 15.17. Setzt man $x = 0$ und $\lambda = 0$ in Definition 15.16 ein, so erhält man sofort, dass $f(0) = 0$ für jeden Morphismus $f: V \to W$ gilt. Für ein festes $a \in V\backslash\{0\}$ ist also z. B. die Verschiebeabbildung $f: V \to V,\ x \mapsto x + a$ wegen $f(0) = a \neq 0$ nie ein Morphismus.

Beispiel 15.18.

(a) Für beliebige K-Vektorräume V und W ist die Nullabbildung $f: V \to W,\ x \mapsto 0$ natürlich immer ein Morphismus.

(b) Für eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ bezeichnen wir mit f_A die Abbildung

$$f_A: K^n \times K^m,\ x \mapsto Ax.$$

Sie ist ein Morphismus, denn für alle $x, y \in K^n$ und $\lambda \in K$ gilt

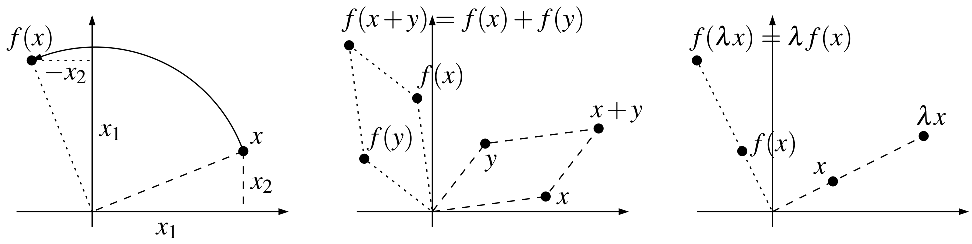
$$f_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = f_A(x) + f_A(y) \quad \text{und} \quad f_A(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda f_A(x)$$

(wie wir bereits in Bemerkung 13.13 festgestellt hatten).

Konkret erhalten wir z. B. für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{die lineare Abbildung} \quad f_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Geometrisch beschreibt sie wie im Bild unten links eine Vierteldrehung um den Ursprung. An den anderen beiden Bildern kann man die Morphismuseigenschaft auch gut anschaulich ablesen: Im mittleren Bild ist z. B. das gepunktete Parallelogramm aus der Drehung des gestrichelten entstanden, und der äußerste Punkt ergibt sich damit sowohl durch Addition der Punkte $f(x)$ und $f(y)$ als auch durch Drehung von $x+y$, d. h. es ist $f(x) + f(y) = f(x+y)$. Entsprechendes gilt für die Skalarmultiplikation im rechten Bild.



Anschaulich ist damit auch schon erkennbar, dass Drehungen um andere Winkel (um den Ursprung) ebenfalls Morphismen sein sollten. Wir werden solche allgemeinen Drehungen später in Beispiel **??** und Abschnitt **??** untersuchen.

(c) Die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2$$

ist nicht linear, denn es ist z. B.

$$f\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 = f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

(d) Lemma 13.7 besagt genau, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ die Transposition von Matrizen

$$f: K^{m\times n} \to K^{n\times m},\ A \mapsto A^\mathsf{T}$$

eine lineare Abbildung ist.

(e) Es sei $V \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen Polynomfunktionen aus Beispiel 15.8 (e). Wir betrachten die Abbildung $f: V \to V,\ \varphi \mapsto \varphi'$, die jedem Polynom $\varphi: x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ seine *Ableitung*

$$\varphi': x \mapsto \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} \qquad (*)$$

zuordnet.

Wenn ihr die Ableitung bereits aus der Analysis kennt, wisst ihr aus den Regeln in Beispiel **?? ??** schon, dass die Ableitung eines Polynoms durch $(*)$ gegeben ist, und dass f eine lineare Abbildung ist, da nach Satz **?? ??** und Beispiel **?? ??** für alle differenzierbaren Funktionen φ und ψ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ sowohl $(\varphi+\psi)' = \varphi' + \psi'$ als auch $(\lambda\varphi)' = \lambda\varphi'$ gilt.

Wenn ihr die Ableitung aus der Analysis noch nicht kennt, könnt ihr $(*)$ für die Zwecke der linearen Algebra einfach als *Definition* der Ableitung eines Polynoms ansehen. Man rechnet dann schnell nach, dass f wirklich eine lineare Abbildung ist: Für zwei Polynome $\varphi(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ und $\psi(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$ (wobei n der größere der beiden Grade ist, so dass sowohl φ als auch ψ so geschrieben werden können) sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$(\varphi+\psi)'(x) = \sum_{k=1}^n k\,(a_k+b_k)x^{k-1} = \sum_{k=1}^n k\,a_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^n k\,b_k x^{k-1} = \varphi'(x) + \psi'(x)$$

$$\text{und} \quad (\lambda\varphi)'(x) = \sum_{k=1}^n k\,(\lambda a_k)x^{k-1} = \lambda \sum_{k=1}^n k\,a_k x^{k-1} = \lambda\varphi'(x).$$

Sind der Startraum K^n und der Zielraum K^m für gewisse $m,n \in \mathbb{N}$, so ist die Situation ähnlich wie bei Unterräumen in Satz 15.9 wieder deutlich schöner: In diesem Fall wollen wir jetzt zeigen, dass *jeder* Morphismus $f\colon K^m \to K^n$ von der Form f_A wie in Beispiel 15.18 (b) ist – und zwar sogar mit einer eindeutig bestimmten Matrix $A \in K^{m\times n}$.

Satz und Definition 15.19 (Lineare Abbildungen $K^n \to K^m$ und Abbildungsmatrizen)**.** *Zu jeder linearen Abbildung $f\colon K^n \to K^m$ gibt es genau eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ mit*

$$f(x) = Ax \quad \textit{für alle } x \in K^n,$$

*nämlich $A = (f(e_1) \mid \cdots \mid f(e_n))$. Wir nennen sie die **Abbildungsmatrix** von f und bezeichnen sie mit A_f.*

Beweis. Die geforderte Bedingung legt nach Beispiel 13.10 (d) für alle $j = 1,\dots,n$ die j-te Spalte von A fest zu $Ae_j = f(e_j)$. Damit ist A eindeutig bestimmt als $(f(e_1) \mid \cdots \mid f(e_n))$. Da f linear ist, folgt aus dieser Beziehung für die Einheitsvektoren aber auch für alle $x \in K^n$ mit Koordinaten $x_1,\dots,x_n$

$$f(x) = f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) = x_1Ae_1 + \cdots + x_nAe_n = Ax. \qquad \square$$

Wir wollen nun einige elementare Eigenschaften von Morphismen zeigen und beginnen damit, dass Bilder und Urbilder (im Sinne von Definition 2.11) von Unterräumen unter Morphismen immer wieder Unterräume sind.

Lemma 15.20 (Bilder und Urbilder von Unterräumen)**.** *Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) *Ist U ein Unterraum von V, so ist $f(U)$ ein Unterraum von W.*

(b) *Ist U ein Unterraum von W, so ist $f^{-1}(U)$ ein Unterraum von V.*

Beweis. Wir müssen das Unterraumkriterium aus Satz 15.6 überprüfen.

(a) Wegen $0 \in U$ ist nach Bemerkung 15.7 zunächst $0 = f(0) \in f(U)$, also ist $f(U) \neq \emptyset$. Wir zeigen nun die Abgeschlossenheit von $f(U)$ bezüglich der Vektoraddition. Es seien dazu $x,y \in f(U)$, d. h. $x = f(u)$ und $y = f(v)$ für gewisse $u,v \in U$. Dann ist auch $u+v \in U$, und damit folgt $x+y = f(u)+f(v) = f(u+v) \in f(U)$.

Genauso zeigt man die Abgeschlossenheit unter der Skalarmultiplikation.

(b) Wegen $f(0) = 0 \in U$ ist zunächst einmal $0 \in f^{-1}(U)$, d. h. es ist $f^{-1}(U) \neq \emptyset$. Wir zeigen jetzt die Abgeschlossenheit von $f^{-1}(U)$ unter der Vektoraddition. Dazu seien $x,y \in f^{-1}(U)$, d. h. $x,y \in V$ mit $f(x), f(y) \in U$. Dann ist auch $f(x+y) = f(x)+f(y) \in U$, also $x+y \in f^{-1}(U)$.

Analog ergibt sich die Abgeschlossenheit unter der Skalarmultiplikation. $\square$

Die wichtigsten Spezialfälle dieses Lemmas sind die folgenden, die wir im Zusammenhang mit Matrizen schon kennengelernt hatten:

Definition 15.21 (Bild und Kern eines Morphismus)**.** Es sei $f\colon V \to W$ ein lineare Abbildung von K-Vektorräumen.

(a) Die Menge $\operatorname{Im} f := f(V) = \{f(x) : x \in V\}$ heißt das **Bild** von f.

(b) Die Menge $\operatorname{Ker} f := f^{-1}(\{0\}) = \{x \in V : f(x) = 0\}$ heißt der **Kern** von f.

Nach Lemma 15.20 gilt offensichtlich $\operatorname{Im} f \leq W$ und $\operatorname{Ker} f \leq V$.

Beispiel 15.22. Im Fall $V = K^n$ und $W = K^m$ sind Bild und Kern eines Morphismus $f\colon K^n \to K^m$ dasselbe wie Bild und Kern der zugehörigen Abbildungsmatrix $A := A_f$ aus Definition 15.19: Da f von der Form $f(x) = Ax$ ist, ist nach Definition 14.19

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} A &= \{Ax : x \in K^n\} = \{f(x) : x \in K^n\} = \operatorname{Im} f \\ \text{und} \quad \operatorname{Ker} A &= \{x \in K^n : Ax = 0\} = \{x \in K^n : f(x) = 0\} = \operatorname{Ker} f. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ nach Definition genau dann surjektiv, wenn $\operatorname{Im} f = W$. Wir wollen jetzt ein analoges Kriterium auch für die Injektivität zeigen.

Lemma 15.23. *Eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Beweis.

„$\Rightarrow$“ Ist f injektiv, so hat der Nullvektor höchstens ein Urbild unter f. Wegen $f(0) = 0$ ist das Urbild des Nullvektors also genau der Nullvektor, d. h. es ist $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

„$\Leftarrow$“ Es sei $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Weiterhin seien $x, y \in V$ mit $f(x) = f(y)$. Wegen der Linearität von f gilt dann $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$, mit $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ also $x - y = 0$. Damit folgt $x = y$, d. h. f ist injektiv. □

Lemma 15.24 (Umkehrabbildungen und Verkettungen)**.** *Es sei $f\colon V \to W$ ein Morphismus von K-Vektorräumen. Dann gilt:*

(a) *Ist f bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung f^{-1} ein Morphismus.*

(b) *Ist $g\colon W \to Z$ ein weiterer Morphismus von K-Vektorräumen, so ist auch $g \circ f\colon V \to Z$ ein Morphismus.*

Beweis.

(a) Es seien $x, y \in W$; wir setzen $u = f^{-1}(x)$ und $v = f^{-1}(y)$, also $x = f(u)$ und $y = f(v)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(x+y) &= f^{-1}(f(u) + f(v)) \\ &= f^{-1}(f(u+v)) && (f \text{ ist ein Morphismus}) \\ &= u + v && (f^{-1} \text{ ist Umkehrabbildung von } f) \\ &= f^{-1}(x) + f^{-1}(y). \end{aligned}$$

Analog zeigt man die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation.

(b) Für $x, y \in V$ gilt

$$\begin{aligned} g(f(x+y)) &= g(f(x) + f(y)) && (f \text{ ist ein Morphismus}) \\ &= g(f(x)) + g(f(y)) && (g \text{ ist ein Morphismus}). \end{aligned}$$

Genauso ergibt sich die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation. □

Im Fall von Vektorräumen der Form K^n lassen sich die Ergebnisse aus Lemma 15.23 und 15.24 wie erwartet auch wieder in die Sprache der Matrizen übersetzen:

Folgerung 15.25. *Es seien $f\colon K^n \to K^m$ ein Morphismus und $A := A_f$ seine Abbildungsmatrix. Dann gilt:*

(a) *Die Abbildung f ist genau dann injektiv, wenn* $\operatorname{rk} A = n$.

Die Abbildung f ist genau dann surjektiv, wenn $\operatorname{rk} A = m$.

Insbesondere ist f also genau dann bijektiv, wenn A quadratisch und invertierbar ist. In diesem Fall ist die Umkehrabbildung f^{-1} der Morphismus mit Abbildungsmatrix A^{-1}.

(b) *Ist $g\colon K^m \to K^p$ ein weiterer Morphismus, so ist*

$$A_{g\circ f} = A_g \cdot A_f,$$

d. h. die Verkettung von Morphismen entspricht der Multiplikation der zugehörigen Abbildungsmatrizen.

Beweis.

(a) Da f gegeben ist durch $f(x) = Ax$ für alle $x \in K^n$, ist dies genau die Aussage über die universelle Lösbarkeit des Gleichungssystems $Ax = b$ aus Folgerung 14.28 bzw. Bemerkung 14.29.

(b) Mit $B = A_g$ gilt für alle $x \in K^n$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = B(Ax) = (BA)x,$$

d. h. $BA = A_g \cdot A_f$ ist die Abbildungsmatrix von $g\circ f$. □

Aufgabe 15.26. Man zeige: Sind $f,g\colon V \to W$ zwei lineare Abbildungen, so gilt

(a) $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Ker} g \subset \operatorname{Ker}(f+g)$;

(b) $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.

Weiterhin gebe man in beiden Fällen ein Beispiel an, das zeigt, dass man im Allgemeinen nicht „$\subset$“ durch „$=$“ ersetzen kann.

Aufgabe 15.27. Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Ferner sei U ein Unterraum von V mit $U \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ und $U + \operatorname{Ker} f = V$.

Zeige, dass die Abbildung $f|_U\colon U \to \operatorname{Im} f$ bijektiv ist.

Aufgabe 15.28. Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $V \le \operatorname{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der Unterraum aller Polynomfunktionen vom Grad kleiner als n. Zeige, dass die Abbildung

$$f\colon V \to \mathbb{R}^n,\ \varphi \mapsto (\varphi(1),\dots,\varphi(n)).$$

linear ist, und bestimme Kern und Bild von f.

Aufgabe 15.29. Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$ heißt *Projektion*, wenn $f\circ f = f$.

(a) Gib für den Fall $V = \mathbb{R}^2$ ein Beispiel für eine Projektion an, bei der sowohl $\operatorname{Ker} f$ als auch $\operatorname{Im} f$ nicht-triviale Unterräume von V sind.

(b) Man zeige: Ist $f\colon V \to V$ eine Projektion, so gilt $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ und $\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = V$.

(c) Es seien $f,g\colon V \to V$ zwei Projektionen. Beweise, dass $f+g$ genau dann ebenfalls eine Projektion ist, wenn $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$ und $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$.

Gilt diese Aussage auch für Vektorräume über einem beliebigen Körper?

Wie wir nun zum Abschluss dieses Kapitels noch sehen wollen, haben bijektive Morphismen wie in Lemma 15.24 (a) in der Praxis eine besondere Bedeutung. Sie haben daher auch einen besonderen Namen:

Definition 15.30 (Isomorphismen)**.** Es seien V und W zwei K-Vektorräume.

(a) Einen bijektiven Morphismus $f\colon V \to W$ (der nach Lemma 15.24 (a) also einen Umkehrmorphismus $f^{-1}\colon W \to V$ besitzt) bezeichnet man als **(Vektorraum-)Isomorphismus**.

(b) V und W heißen **isomorph** (in Zeichen: $V \cong W$), wenn es einen Isomorphismus $f\colon V \to W$ zwischen ihnen gibt.

Beispiel 15.31. Anschaulich bedeutet ein Isomorphismus f zwischen zwei Vektorräumen V und W, dass diese beiden Räume „als Vektorräume ununterscheidbar" sind: Die Objekte in V und W sind zwar unterschiedlich benannt, aber in allen Rechnungen können wir jederzeit mit der bijektiven Abbildung f bzw. der inversen Abbildung f^{-1} zwischen den beiden Darstellungen in V und W hin- und herwechseln, ohne das Endergebnis zu ändern. Die folgenden Beispiele verdeutlichen dies.

(a) Der Unterraum

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \le \mathbb{R}^3 \quad \text{ist mit} \quad f \colon V \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

isomorph zu $\mathbb{R}^2$. In der Tat ist in diesem Beispiel offensichtlich, dass f linear und bijektiv ist. Auch anschaulich ist in diesem Fall klar, dass V und $\mathbb{R}^2$ „im Prinzip ununterscheidbar" sind, denn beide Räume sind einfach die reelle Ebene – die im Fall von V lediglich als Koordinatenebene in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet ist.

(b) Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist der Raum $K^{m\times n}$ aller $m \times n$-Matrizen über K isomorph zu K^{mn}: Ein Isomorphismus $f \colon K^{m\times n} \to K^{mn}$ ist einfach dadurch gegeben, dass man die Einträge einer Matrix von links oben nach rechts unten nun untereinander in einen Vektor in K^{mn} schreibt. Auch hier ist klar, dass f linear und bijektiv ist, also dass die Anordnung der Zahlen – einmal als rechteckiges Schema und einmal untereinander geschrieben – nichts an der Vektorraumstruktur ändert, da Addition und Skalarmultiplikation in beiden Fällen einfach komponentenweise ausgeführt werden. (Dass es in $K^{m\times n}$ eine Matrixmultiplikation gibt, in K^{mn} jedoch nicht, spielt hierbei keine Rolle, da dies nicht Teil der Vektorraumaxiome ist.)

(c) Für den Vektorraum V aller reellen Polynome vom Grad höchstens 2 ist

$$f \colon V \to \mathbb{R}^3,\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mapsto \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus, d. h. es gilt $V \cong \mathbb{R}^3$. Auch hier ist wieder klar, dass f linear ist, und dass der Vektor der Koeffizienten a_0, a_1, a_2 dieselben Informationen enthält wie das Polynom $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ (siehe Bemerkung 3.22).

(d) Für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \neq n$ sind K^m und K^n nicht isomorph, da es dann nach Folgerung 15.25 (a) keinen Isomorphismus von K^m nach K^n gibt. So ist anschaulich gesprochen z. B. eine Gerade K^1 „etwas anderes" als eine Ebene K^2. Diese Idee wird in **??** zum zentralen Konzept der Dimension eines Vektorraums führen.

In der Tat hatten wir in Satz 15.19 noch einen weiteren Fall gesehen, in dem zwei Objekte „im Prinzip dasselbe" waren, nämlich lineare Abbildungen von K^n nach K^m und Matrizen in $K^{m\times n}$. Auch diese Aussage können wir jetzt wie folgt mit Isomorphismen exakt formulieren.

Lemma 15.32 ($\mathrm{Hom}(V,W)$ als Vektorraum)**.** *Es seien V und W zwei K-Vektorräume.*

(a) *$\mathrm{Hom}(V,W)$ ist ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(V,W)$ (und damit also selbst wieder ein K-Vektorraum).*

(b) *Im Fall $V = K^n$ und $W = K^m$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ ist*

$$K^{m\times n} \to \mathrm{Hom}(K^n, K^m),\ A \mapsto f_A$$

ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung

$$\mathrm{Hom}(K^n, K^m) \to K^{m\times m},\ f \mapsto A_f.$$

Beweis.

(a) Natürlich liegt die Nullabbildung in $\mathrm{Hom}(V,W)$. Zur Überprüfung der Abgeschlossenheit von $\mathrm{Hom}(V,W)$ bezüglich der Addition seien $f, g \in \mathrm{Hom}(V,W)$, d. h. f und g seien lineare

Abbildungen. Dann gilt für ihre Summe $f+g$ für alle $x \in V$ und $\lambda \in K$

$$\begin{aligned}(f+g)(x+y) &= f(x+y)+g(x+y) && \text{(Definition von } f+g\text{)}\\ &= f(x)+f(y)+g(x)+g(y) && (f \text{ und } g \text{ sind linear})\\ &= (f+g)(x)+(f+g)(y) && \text{(Definition von } f+g\text{)}\end{aligned}$$

sowie analog

$$(f+g)(\lambda x) = f(\lambda x)+g(\lambda x) = \lambda f(x)+\lambda g(x) = \lambda (f+g)(x).$$

Also ist dann auch $f+g$ linear, d. h. es ist $f+g \in \operatorname{Hom}(V,W)$. Analog überprüft man die Abgeschlossenheit von $\operatorname{Hom}(V,W)$ bezüglich der Skalarmultiplikation.

(b) Die Abbildung $K^{m\times n} \to \operatorname{Hom}(K^n,K^m)$, $A \mapsto f_A$ ist linear, denn für alle $A,B \in K^{m\times n}$ sowie $x \in K^n$ und $\lambda \in K$ gilt

$$f_{A+B}(x) = (A+B)x = Ax+Bx = f_A(x)+f_B(x) \quad \text{und} \quad f_{\lambda A}(x) = (\lambda A)x = \lambda(Ax) = \lambda f_A(x),$$

und damit $f_{A+B} = f_A + f_B$ und $f_{\lambda A} = \lambda f_A$. Die Bijektivität dieser Abbildung haben wir bereits in Satz 15.19 gesehen. □