13. Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Ausgehend von den elementaren Konzepten in den Kapiteln 1 bis 3 wollen wir in dieser Vorlesung zwei grundlegende Gebiete der Mathematik entwickeln: die Analysis und die lineare Algebra. Während sich die eindimensionale Analysis in den Kapiteln **??** bis **??** dabei hauptsächlich mit allgemeinen (in der Regel stetigen oder sogar differenzierbaren) Funktionen in einer reellen Variablen beschäftigt hat, wollen wir nun unabhängig davon im folgenden Teil des Skripts (bis Kapitel **??**) zunächst *lineare* Funktionen in *mehreren* Variablen studieren. Später werden wir die erarbeiteten Resultate dann mit der Analysis kombinieren, um auch Funktionen in mehreren Variablen mit Hilfe von Ableitungen linear approximieren zu können.

In der Analysis arbeitet man ja hauptsächlich über den reellen Zahlen, und das ist in der linearen Algebra auch nicht viel anders. Allerdings haben wir in Kapitel 3 ja auch schon gesehen, dass viele Dinge auch über einem beliebigen Körper funktionieren. Die lineare Algebra verhält sich hier sehr „gutartig“: Da wir letztlich nur lineare Funktionen betrachten werden, benötigen wir gar nicht mehr Struktur der reellen Zahlen als die Körperaxiome. Wir können daher nahezu die gesamte lineare Algebra über einem beliebigen Grundkörper studieren, also z. B. auch über $\mathbb{Q}$, dem Körper $\mathbb{Z}_2$ aus Beispiel 3.6 (b), oder anderen Körpern, die ihr vielleicht inzwischen kennt. Wir vereinbaren daher:

Im Folgenden (bis Kapitel **??**) sei K immer ein fest gewählter Grundkörper.

Beim ersten Lesen könnt ihr euch K aber durchaus gerne einfach als $\mathbb{R}$ vorstellen.

Wenn wir uns nun eine ganze Weile lang nur mit linearen Funktionen bzw. Gleichungen beschäftigen, werden nahezu alle unsere Konzepte und Probleme auf rechnerischer Seite am Ende auf *lineare Gleichungssysteme* der Form

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\;\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{$*$}$$

hinauslaufen, d. h. zu gegebenen $m,n \in \mathbb{N}$ sowie $a_{i,j}, b_i \in K$ für $i = 1,\dots,m$ und $j = 1,\dots,n$ wollen wir alle $(x_1,\dots,x_n) \in K^n$ bestimmen, die diese Gleichungen $(*)$ simultan erfüllen. Um diese Probleme dann auch gleich lösen zu können, wollen wir daher in diesem und dem folgenden Kapitel zunächst einmal studieren, wie die Lösungsmengen solcher linearen Gleichungssysteme aussehen und konkret berechnet werden können. An manchen Stellen können wir dabei auch schon Ausblicke auf die abstrakten Konzepte geben, die wir später in der Vorlesung einführen werden und die der eigentliche Gegenstand der linearen Algebra sind (wie z. B. Vektorräume, lineare Abbildungen, lineare Unabhängigkeit oder Dimension).

13.A Vektoren und Matrizen

Bevor wir mit der Untersuchung linearer Gleichungssysteme beginnen, sollten wir als Erstes eine effizientere Notation dafür einführen, da die Schreibweise $(*)$ in der Einleitung oben natürlich sehr unübersichtlich ist und auch viel Platz wegnimmt. Dies ist mit Hilfe von sogenannten *Matrizen* möglich. Die Idee besteht dabei einfach darin, die $m \cdot n$ Zahlen $a_{i,j}$ in $(*)$ in einem mathematischen Objekt zusammenzufassen.

Definition 13.1 (Matrizen)**.** Es seien K ein Körper und $m,n \in \mathbb{N}$.

(a) Eine $m \times n$-**Matrix** mit Einträgen in K ist ein rechteckiges Zahlenschema

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_{i,j} \in K \text{ für } 1 \leq i \leq m \text{ und } 1 \leq j \leq n$$

mit m Zeilen und n Spalten. Analog zur Schreibweise für Zahlenfolgen bezeichnen wir eine solche Matrix auch mit

$$(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{oder einfach} \quad (a_{i,j})_{i,j}.$$

Es ist eine Konvention, dass wir in diesem Fall hinter der Klammer immer zuerst den Zeilenindex und dann den Spaltenindex schreiben (Merkregel: „Zeile zuerst, Spalte später").

Die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Einträgen in K wird mit $K^{m \times n}$ bezeichnet – auch hier steht in der Bezeichnung also zuerst die Anzahl der Zeilen und dann die Anzahl der Spalten.

(b) Die $m \times n$-Matrix, deren Einträge alle 0 sind, heißt **Nullmatrix**. Wir schreiben sie in der Regel einfach als $0 \in K^{m \times n}$.

(c) Eine Matrix mit gleich vielen Zeilen wie Spalten (also $m = n$) heißt **quadratisch**. Für eine solche quadratische Matrix bezeichnet man die Einträge $a_{i,i}$ mit $i = 1, \dots, n$ (also die Einträge von links oben nach rechts unten) als ihre **Diagonaleinträge**.

Notation 13.2 (Vektoren und Skalare)**.** In der linearen Algebra schreibt man die Komponenten eines Elements der Produktmenge K^m *untereinander* als $m \times 1$-Matrix (statt wie sonst üblich nebeneinander) und identifiziert somit K^m mit $K^{m \times 1}$, also mit Matrizen mit nur einer Spalte. Diese Konvention wird sich bei der Einführung von Matrixprodukten in Abschnitt 13.B als nützlich erweisen.

Als vorläufige Notation bis Kapitel **??** bezeichnen wir diese Elemente von $K^m = K^{m \times 1}$ als **Vektoren**, die Elemente von K als **Skalare**. Vektoren sind in diesem Sinne also zunächst Spezialfälle von Matrizen. Den Vektor in K^m, dessen Einträge alle 0 sind, nennt man dementsprechend wie in Definition 13.1 (b) auch **Nullvektor**.

Oft kommt auch der Vektor in K^m vor, dessen Einträge nur in einer Zeile i gleich 1 und sonst überall gleich 0 sind. Man nennt ihn den i-ten **Einheitsvektor** und schreibt ihn als e_i. Die Einheitsvektoren in K^3 sind also z. B.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definition 13.3 (Matrixoperationen)**.** Für zwei Matrizen $A = (a_{i,j})_{i,j}$ und $B = (b_{i,j})_{i,j}$ in $K^{m \times n}$ sowie $\lambda \in K$ definieren wir

(a) die Addition $A + B := (a_{i,j} + b_{i,j})_{i,j} \in K^{m \times n}$;

(b) die Skalarmultiplikation $\lambda A := \lambda \cdot A := (\lambda \cdot a_{i,j})_{i,j} \in K^{m \times n}$;

(c) die **transponierte Matrix** $A^{\mathsf{T}} := (a_{j,i})_{i,j} \in K^{n \times m}$.

Beachte, dass wir dabei die Addition und Skalarmultiplikation von Matrizen mit den gleichen Symbolen „+" bzw. „·" wie die entsprechenden Verknüpfungen in K bezeichnet haben. Dies wird im Folgenden nicht zu Verwirrungen führen, da wir durch die Art der verknüpften Objekte immer sofort erkennen können, ob es sich um die Rechenoperationen in K oder die oben Operationen für Matrizen handelt.

Beispiel 13.4.

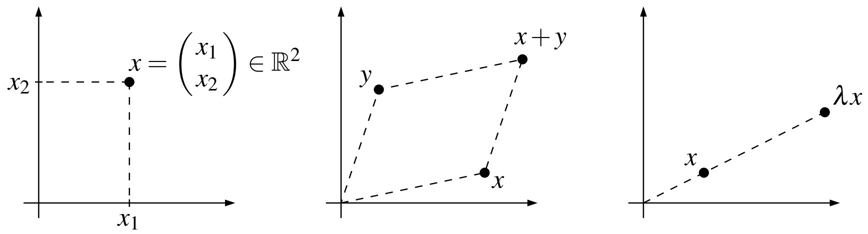
(a) Die Addition und Skalarmultiplikation für Matrizen (und damit auch für Vektoren) sind einfach komponentenweise definiert, es ist also z. B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in K^{2 \times 3} \quad \text{und} \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \in K^2.$$

Die Transposition hingegen vertauscht die Rolle von Zeilen und Spalten in der Matrix, wie z. B. in

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in K^{3\times 2}.$$

(b) Im Fall $K=\mathbb{R}$ und $n=2$ ist $K^n=\mathbb{R}^2$ einfach die bekannte reelle Ebene, und Addition und Skalarmultiplikation können wie im folgenden Bild veranschaulicht werden. Die geometrische Interpretation im Fall von $\mathbb{R}^n$ für andere n ist natürlich analog.



Lemma 13.5 (Eigenschaften der Addition und Skalarmultiplikation von Matrizen). *Für alle natürlichen Zahlen m,n, Matrizen $A,B\in K^{m\times n}$ und Skalare $\lambda,\mu\in K$ gilt:*

(a) $(K^{m\times n},+)$ *ist eine abelsche Gruppe (siehe Definition 3.1).*

(b) *(1. Distributivität)* $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

(c) *(2. Distributivität)* $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

(d) *(Assoziativität)* $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$.

(e) $1\cdot A=A$.

Beweis. Die Beweise folgen alle aus den entsprechenden Eigenschaften von K und ergeben sich durch einfaches Nachrechnen. Wir zeigen hier exemplarisch die 1. Distributivität (b): Mit $A=(a_{i,j})_{i,j}$ gilt

$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\cdot A &= \big((\lambda+\mu)a_{i,j}\big)_{i,j} && \text{(Definition der Skalarmultiplikation)}\\
&= \big(\lambda a_{i,j}+\mu a_{i,j}\big)_{i,j} && \text{(Distributivität in } K\text{)}\\
&= \big(\lambda a_{i,j}\big)_{i,j}+\big(\mu a_{i,j}\big)_{i,j} && \text{(Definition der Matrixaddition)}\\
&= \lambda A+\mu A. && \text{(Definition der Skalarmultiplikation)}
\end{aligned}$$

Die anderen Eigenschaften zeigt man analog. □

Bemerkung 13.6 (Vektorräume). In der Tat ist der Begriff eines Vektors eigentlich viel allgemeiner als in Notation 13.2 – genau wie bei Gruppen und Körpern in Kapitel 3.A werden allgemeine Vektoren über die Operationen definiert, die man mit ihnen durchführen kann. Dies sind gerade die Addition und Skalarmultiplikation, und die Eigenschaften, die man von diesen Verknüpfungen axiomatisch verlangt, sind genau die aus Lemma 13.5. In diesem Sinne bilden dann also nicht nur die Elemente von K^m einen Vektorraum, sondern auch Matrizen in $K^{m\times n}$, aber auch noch viele ganz andere Objekte wie z. B. Polynome, Funktionen oder Folgen.

Das Studium von Vektorräumen in diesem allgemeinen Sinne ist der eigentliche Inhalt der linearen Algebra. Wir werden damit in Kapitel **??** beginnen. Dort werden wir dann auch schnell sehen, dass sich viele Vektorräume am Ende sehr ähnlich wie K^m verhalten (siehe **??**). Unsere momentane Untersuchung von Vektoren K^m wird daher auch für die allgemeine Theorie von Vektorräumen noch sehr nützlich sein.

Lemma 13.7 (Eigenschaften der Transposition von Matrizen). *Für alle natürlichen Zahlen m,n, Matrizen $A,B\in K^{m\times n}$ und Skalare $\lambda\in K$ gilt*

$$(A+B)^{\mathsf{T}}=A^{\mathsf{T}}+B^{\mathsf{T}} \quad \textit{und} \quad (\lambda A)^{\mathsf{T}}=\lambda(A^{\mathsf{T}}).$$

Beweis. Wie Lemma 13.5 ergeben sich auch diese Aussagen durch einfaches Nachrechnen, wir zeigen exemplarisch die erste: Für $A = (a_{i,j})_{i,j}$ und $B = (b_{i,j})_{i,j}$ ist

$$(A+B)^{\mathsf{T}} = (a_{j,i}+b_{j,i})_{i,j} = (a_{j,i})_{i,j} + (b_{j,i})_{i,j} = A^{\mathsf{T}} + B^{\mathsf{T}}. \qquad \square$$

Bemerkung 13.8 (Lineare Abbildungen)**.** Abbildungen wie die Transposition von Matrizen, die im Sinne von Lemma 13.7 mit der Addition und Skalarmultiplikation vertauschen, werden wir später *lineare Abbildungen* nennen und ausführlich untersuchen (siehe **??**). Zusammen mit Vektorräumen wie in Bemerkung 13.6 sind die linearen Abbildungen zwischen ihnen der Hauptgegenstand der linearen Algebra.

13.B Matrixmultiplikation

Die Addition und Skalarmultiplikation von Matrizen waren einfach komponentenweise definiert und haben somit die rechteckige Struktur einer Matrix überhaupt nicht benutzt. Es gibt aber noch eine weitere sehr wichtige Rechenoperation für Matrizen, bei die Form der Matrix eine entscheidende Rolle spielt: die sogenannte Matrixmultiplikation, die wir jetzt einführen wollen.

Definition 13.9 (**Matrixmultiplikation**)**.** Für natürliche Zahlen m,n,p seien $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{m\times n}$ und $B = (b_{j,k})_{j,k} \in K^{n\times p}$, d. h. die Matrix B habe so viele Zeilen wie A Spalten. Dann definieren wir das Matrixprodukt AB als

$$AB := A \cdot B := \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k}\Big)_{i,k} \quad \in K^{m\times p}$$

(merke: Es wird über die „mittleren Indizes" summiert, also über den Spaltenindex der ersten und den Zeilenindex der zweiten Matrix). Das Produkt AB hat also so viele Zeilen wie die erste Matrix und so viele Spalten wie die zweite.

Beispiel 13.10.

(a) Es ist z. B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

(hier ist $m = n = p = 2$). Im Gegensatz dazu ist das Matrixprodukt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

nicht definiert, weil die erste Matrix nur eine Spalte, die zweite aber zwei Zeilen hat. Der Einfachheit halber werden wir in Zukunft bei einem Matrixprodukt AB stets voraussetzen, dass die zweite Matrix so viele Zeilen hat wie die erste Spalten, und dies nicht jedesmal wieder erwähnen.

(b) Ist $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{m\times n}$ und $x \in K^n$ mit Komponenten $x_1,\dots,x_n$, so können wir x gemäß Notation 13.2 als Matrix mit nur einer Spalte auffassen und erhalten das Matrixprodukt

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} \in K^{m\times 1} = K^m. \qquad (*)$$

Wir können also auch eine Matrix mit einem Vektor (der passenden Größe) multiplizieren, um wieder einen Vektor zu erhalten.

(c) Beachte, dass $(*)$ in (b) genau die linke Seite eines linearen Gleichungssystems wie in der Einleitung zu diesem Kapitel ist. Wir können (und werden) lineare Gleichungssysteme in Zukunft also einfach als $Ax = b$ schreiben, wobei $A \in K^{m\times n}$ eine gegebene Matrix, $b \in K^m$ ein gegebener Vektor und $x \in K^n$ der gesuchte Vektor sind.

(d) Ein einfacher, aber oft vorkommender und daher wichtiger Spezialfall von (b) ist, wenn $x = e_j$ für $j = 1, \dots, n$ der j-te Einheitsvektor ist: In diesem Fall ist Ae_j gerade die j-te Spalte von A.

Auch für die Matrixmultiplikation wollen wir zunächst einmal die grundlegenden Rechenregeln angeben bzw. beweisen.

Lemma 13.11 (Eigenschaften der Matrixmultiplikation)**.** *Für alle Matrizen A, B, C passender Größe (d. h. so dass die betrachteten Summen und Produkte definiert sind) sowie $\lambda \in K$ gilt:*

(a) *(Distributivität) $(A+B)C = AC+BC$ und $A(B+C) = AB+AC$.*

(b) *(Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.*

(c) *(Assoziativität) $(AB)C = A(BC)$.*

(d) *(Verträglichkeit mit der Transposition) $(AB)^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}}$.*

Das Matrixprodukt ist jedoch im Allgemeinen nicht kommutativ (aufgrund der Größenbedingung ist das Produkt AB ja auch nicht einmal genau dann definiert, wenn BA es ist).

Beweis. Auch hier ist der Beweis direktes Nachrechnen. Wir zeigen diesmal exemplarisch die Assoziativität in (c): Für $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{m\times n}$, $B = (b_{j,k})_{j,k} \in K^{n\times p}$ und $C = (c_{k,l})_{k,l} \in K^{p\times r}$ gilt nach Definition der Matrixmultiplikation

$$AB = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k}\right)_{i,k} \quad \text{und} \quad BC = \left(\sum_{k=1}^{p} b_{j,k} c_{k,l}\right)_{j,l},$$

und damit

$$(AB)C = \left(\sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k}\right) c_{k,l}\right)_{i,l} \quad \text{und} \quad A(BC) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \left(\sum_{k=1}^{p} b_{j,k} c_{k,l}\right)\right)_{i,l}.$$

Nach der Distributivität in K stimmen diese beiden Ausdrücke aber überein: Durch Ausmultiplizieren ergibt sich in beiden Fällen

$$(AB)C = \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{i,j} b_{j,k} c_{k,l}\right)_{i,l} = A(BC). \qquad \square$$

Aufgabe 13.12 (Blockmatrixmultiplikation). Es seien $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times p}$ zwei Matrizen, die in „Blockform“

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right) \quad \text{bzw.} \quad B = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right)$$

mit $A_1 \in K^{m_1\times n_1}$ und $B_1 \in K^{n_1\times p_1}$ gegeben sind. Zeige, dass das Matrixprodukt AB dann ebenfalls in Blockform

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} A_1B_1 + A_2B_3 & A_1B_2 + A_2B_4 \\ \hline A_3B_1 + A_4B_3 & A_3B_2 + A_4B_4 \end{array}\right)$$

berechnet werden kann (wobei die Blöcke formal genauso multipliziert und addiert werden, als würde man das Produkt zweier Matrizen der Größe 2×2 berechnen). Analog funktioniert diese Rechenregel auch für eine Aufteilung in noch mehr Blöcke.

Bemerkung 13.13 (Matrixmultiplikation als lineare Abbildung)**.** Wie in Beispiel 13.10 (b) liefert jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ eine Abbildung

$$f_A \colon K^n \to K^m,\ x \mapsto Ax.$$

Nach Lemma 13.11 vertauscht sie mit der Addition und Skalarmultiplikation, d. h. es gilt

$$f_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = f_A(x) + f_A(y) \quad \text{und} \quad f_A(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda f_A(x)$$

für alle $x, y \in K^n$ und $\lambda \in K$. Wie die Transposition ist sie also eine lineare Abbildung im Sinne von Bemerkung 13.8. In der Tat werden wir in **??** noch sehen, dass jede lineare Abbildung von K^n nach K^m von dieser Form ist und diese linearen Abbildungen so genau den Matrizen in $K^{m\times n}$ entsprechen.

Verkettet man solche Abbildungen miteinander, so ist (für Matrizen geeigneter Größe)

$$(f_A \circ f_B)(x) = A(Bx) \overset{13.11\,(c)}{=} (AB)x = f_{AB}(x),$$

d. h. man kann sich die allgemeine Matrixmultiplikation so vorstellen, dass sie der Verkettung der zugehörigen linearen Abbildungen entspricht.

Nach Lemma 13.11 (c) ist die Matrixmultiplikation assoziativ. Es ist daher naheliegend zu untersuchen, ob sie auch die anderen Gruppenaxiome aus Definition 3.1 erfüllt. Damit sie überhaupt zwischen allen Matrizen definiert ist, sollten wir uns dazu auf quadratische Matrizen beschränken. Ein – wie in Definition 3.1 (b) gefordertes – neutrales Element ist dann schnell gefunden:

Konstruktion 13.14 (Einheitsmatrix)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die **Einheitsmatrix** der Größe $n \times n$ als

$$E_n := (\, e_1 \mid \cdots \mid e_n \,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}.$$

Wir schreiben sie oft auch einfach als E, wenn ihre Größe aus dem Zusammenhang klar ist. In der Literatur ist auch die Bezeichnung I_n oder I üblich. Offensichtlich können wir sie auch schreiben als

$$E_n = (\delta_{i,j})_{i,j} \quad \text{mit} \quad \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases}$$

Damit sehen wir sofort für jede Matrix $A \in K^{m \times n}$, dass

$$E_m A = \Big(\sum_{j=1}^{n} \delta_{i,j} a_{j,k} \Big)_{i,k} = (a_{i,k})_{i,k} = A,$$

und analog $AE_n = A$. Die Einheitsmatrizen sind in diesem Sinne also sogar für nicht-quadratische Matrizen neutral für die Matrixmultiplikation.

Inverse Matrizen finden wir jedoch nicht immer. Um dies genauer zu untersuchen, definieren wir die Invertierbarkeit zunächst als Eigenschaft.

Definition 13.15 (Inverse Matrizen)**.** Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$. Eine Matrix $A' \in K^{n \times n}$ heißt eine **inverse Matrix** zu A, wenn $A'A = AA' = E_n$. Existiert eine solche zu A inverse Matrix, so nennt man A **invertierbar**.

Die Menge aller invertierbaren Matrizen in $K^{n \times n}$ wird mit $\mathrm{GL}(n, K)$ bezeichnet – der Name kommt von der englischen Bezeichnung „general linear group“ und rührt daher, dass $\mathrm{GL}(n, K)$ in der Tat eine Gruppe ist, wie wir jetzt zeigen werden.

Lemma 13.16 (Invertierbare Matrizen als Gruppe)**.** *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge $\mathrm{GL}(n, K)$ aller invertierbaren $n \times n$-Matrizen eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die Matrixmultiplikation wirklich eine Verknüpfung auf der Menge $\mathrm{GL}(n, K)$ ist, also dass für $A, B \in \mathrm{GL}(n, K)$ auch $AB \in \mathrm{GL}(n, K)$ gilt: Sind A' und B' invers zu A bzw. B, so ist

$$B'A' \cdot AB = B'EB = B'B = E \quad \text{und} \quad AB \cdot B'A' = AEA' = AA' = E. \tag{$*$}$$

Also ist $B'A'$ invers zu AB, und damit $AB \in \mathrm{GL}(n, K)$.

Die Gruppenaxiome sind ebenfalls schnell überprüft:

- Die Matrixmultiplikation ist (sogar für beliebige Matrizen) assoziativ nach Lemma 13.11 (c).
- Die Einheitsmatrix $E \in \mathrm{GL}(n, K)$ aus Konstruktion 13.14 ist ein neutrales Element.
- Für $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ existiert nach Definition eine inverse Matrix $A' \in K^{n \times n}$ mit $A'A = AA' = E$, und dieselbe Gleichung zeigt auch, dass $A' \in \mathrm{GL}(n, K)$.

Also ist $\mathrm{GL}(n,K)$ mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe. □

Folgerung 13.17 (Eigenschaften invertierbarer Matrizen)**.** *Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A,B \in \mathrm{GL}(n,K)$. Dann gilt:*

(a) *Es gibt genau eine zu A inverse Matrix. Wir bezeichnen sie mit A^{-1}.*

(b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(c) $(A^{-1})^{-1} = A$.

(d) *Für alle Vektoren $b \in K^n$ hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ genau eine Lösung, nämlich $x = A^{-1}b$.*

Beweis. Da $\mathrm{GL}(n,K)$ nach Lemma 13.16 eine Gruppe ist, folgen die Eigenschaften (a), (b) und (c) unmittelbar aus Lemma 3.4 (b), (c) bzw. (d). Für (d) müssen wir nur bemerken, dass die Gleichungen $Ax = b$ und $x = A^{-1}b$ durch Multiplikation mit A^{-1} bzw. A zueinander äquivalent sind. □

Für eine invertierbare (quadratische) Matrix A können wir mit Folgerung 13.17 (d) also zumindest theoretisch eine Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ hinschreiben. Es bleiben aber natürlich noch die folgenden beiden Fragen:

- Wie können wir überhaupt bestimmen, ob eine quadratische Matrix A invertierbar ist, und in diesem Fall die inverse Matrix A^{-1} berechnen?
- Wie können wir lineare Gleichungssysteme $Ax = b$ für nicht invertierbare bzw. nicht quadratische Matrizen A lösen?

Beide Fragen werden wir im nächsten Kapitel beantworten. Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir nur noch kurz ein paar Beispiele angeben, in denen wir die Invertierbarkeit bzw. Nichtinvertierbarkeit von Matrizen einfach nachprüfen können.

Beispiel 13.18.

(a) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist invertierbar mit $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, denn es ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2.$$

In der Tat werden wir in **??** noch sehen, dass es genügen würde, nur eine dieser beiden Gleichungen zu überprüfen.

(b) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{also} \quad \begin{aligned} 1x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 1x_2 &= 2 \end{aligned}$$

hat nach (a) und Folgerung 13.17 (d) die (natürlich auch direkt offensichtliche) eindeutige Lösung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

also $x_1 = -1$ und $x_2 = 2$.

(c) Es sei $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix, in der in einer Zeile $i \in \{1,\dots,n\}$ alle Einträge gleich 0 sind. Dann sind für jede Matrix $B \in K^{n\times n}$ nach Definition der Matrixmultiplikation auch alle Einträge von AB in Zeile i gleich 0. Insbesondere kann AB damit niemals gleich E, also A nicht invertierbar sein.

Analog ist auch eine quadratische Matrix, bei der in einer Spalte alle Einträge gleich 0 sind, sicher nicht invertierbar.

Aufgabe 13.19. Für ein gegebenes $a \in \mathbb{R}$ sei $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Für $a \neq 0$ berechne man A^n für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

(Hinweis: Bestimme A^n für kleine Werte von n, stelle damit eine Vermutung für die allgemeine Form von A^n auf, und beweise diese Vermutung dann mit vollständiger Induktion.)

(b) Für welche a ist die Matrix A invertierbar? Bestimme in diesen Fällen auch die inverse Matrix A^{-1}.