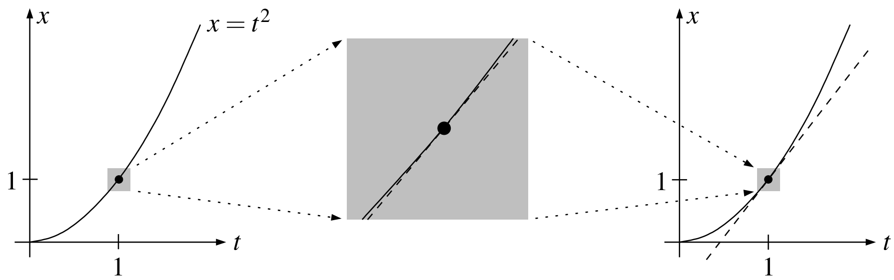
0. Einleitung und Motivation

In diesem Skript – so verspricht es der Titel – wollen wir uns die Grundlagen der Mathematik erarbeiten. Aber was ist das überhaupt, die „Grundlagen der Mathematik“? Bei uns an der TU Kaiserslautern verstehen wir unter dieser Vorlesung die Kombination zweier Themengebiete, die in der Tat das grundlegende Handwerkszeug für nahezu die gesamte Mathematik darstellen, nämlich

- der *Analysis*, d. h. der Untersuchung von Folgen und Grenzwerten, Stetigkeit, sowie der Differential- und Integralrechnung (zunächst in einer und im zweiten Semester dann auch in mehreren Variablen), und
- der *linearen Algebra*, d. h. der Theorie der Vektorräume, linearen Abbildungen und Gleichungssysteme.

Von beiden Gebieten habt ihr ja aus der Schule wahrscheinlich schon eine ungefähre Vorstellung. In der *Analysis* geht es grob gesagt darum, reelle Funktionen *lokal*, also in der Umgebung eines gewählten Punktes, zu untersuchen, und aus diesen Untersuchungen dann wieder Aussagen über die gesamte Funktion zurückzugewinnen. Betrachten wir z. B. ein Auto, das sich entlang einer geraden Strecke bewegt. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Position x des Autos nach der Zeit t (in geeigneten Einheiten) durch die Gleichung $x = t^2$ beschrieben werden kann, so dass die Bewegung durch die Kurve im folgenden Bild links dargestellt wird:



Wir wollen diese Bewegung nun nur in einer kleinen Umgebung eines fest gewählten Zeitpunkts, z. B. des Zeitpunkts $t = 1$ (und damit auch $x = 1$) betrachten. Im Bild oben haben wir diese Umgebung grau markiert und in der Mitte stark vergrößert dargestellt. Wir sehen, dass die Kurve in dieser Umgebung fast wie eine *Gerade* aussieht; wir haben diese Gerade gestrichelt eingezeichnet und im Bild rechts auch außerhalb der gewählten Umgebung fortgesetzt. Geometrisch ist diese Gerade natürlich einfach die *Tangente* an die Kurve an der Stelle $t = 1$. Physikalisch repräsentiert die Steigung dieser Geraden die *Geschwindigkeit* des Autos zum betrachteten Zeitpunkt, denn sie gibt ja gerade an, in welchem Verhältnis sich dort die Strecke x mit der Zeit t verändert. Aus der Schule wisst ihr auch schon, wie man diese Steigung ausrechnet: Man muss dazu die gegebene Funktion t^2 *differenzieren* – so dass man die Ableitung $2t$ erhält – und dort die betrachtete Stelle $t = 1$ einsetzen. Die Steigung ist in unserem Fall also gerade $2 \cdot 1 = 2$, und man rechnet sofort nach, dass $x = 2t - 1$ die Gleichung der oben eingezeichneten Tangente ist. Man sagt, dass die Gerade $x = 2t - 1$ eine *lineare Approximation* der ursprünglich gegebenen Funktion $x = t^2$ im Punkt $t = 1$ ist.

Wir können aus der Kenntnis der zurückgelegten Strecke zu jedem Zeitpunkt also die Geschwindigkeit des Autos durch Differenzieren bestimmen. Man kann sich natürlich auch die umgekehrte Frage stellen: Angenommen, der Kilometerzähler eures Autos ist kaputt, aber ihr beobachtet auf eurer Fahrt ständig eure Geschwindigkeit. Könnt ihr dann am Ende der Fahrt trotzdem ausrechnen, wie weit ihr gefahren seid? Dies ist offensichtlich die „Umkehrung“ des Differenzierens – und auch hier wisst ihr aus der Schule natürlich schon, dass dies auf die *Integralrechnung* führen wird.

In der Praxis bewegt man sich mit dem Auto aber nicht immer nur auf einer geraden Strecke, und demzufolge braucht man für die Beschreibung solch einer Bewegung (und natürlich auch vieler anderer natürlich auftretender Prozesse) mehrere Variablen. Wir werden daher auch Abbildungen betrachten, die mehrere Variablen auf mehrere andere abbilden, wie z. B. die folgende Vorschrift, die zwei reelle Zahlen y_1 und y_2 in Abhängigkeit von zwei anderen x_1 und x_2 ausdrückt:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 \cos x_1 \\ y_2 &= x_1 \, e^{x_2} - x_2 \end{aligned}$$

Genau wie oben werden wir uns auch hier wieder die Frage stellen, ob wir diese (in diesem Fall recht komplizierte) Funktion in der Nähe eines gegebenen Punktes nicht vielleicht durch eine einfache *lineare* Abhängigkeit annähern können. In der Tat ist dies möglich: Wir werden sehen, dass z. B. in einer kleinen Umgebung des Nullpunkts $(x_1, x_2) = (0, 0)$ die obige Vorschrift näherungsweise die gleichen Ergebnisse liefert wie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2 \\ y_2 &= x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Auch wenn diese Gleichungen natürlich viel einfacher als die ursprünglichen sind, sollte offensichtlich sein, dass auch solche linearen Gleichungssysteme bei wachsender Zahl von Variablen (und in der Praxis sind Hunderte oder Tausende von Variablen keine Seltenheit) recht kompliziert werden können. Wir werden daher einen wesentlichen Teil dieser Vorlesung mit der *linearen Algebra*, also dem Studium derartiger linearer Gleichungssysteme, verbringen. Um dabei überhaupt erst einmal den Notationsaufwand in Grenzen zu halten, tut man dabei gut daran, die Start- und Zielvariablen nicht alle einzeln hinzuschreiben, sondern sie zu sogenannten *Vektoren* zusammenzufassen. In der Tat kann man in dieser Sichtweise die lineare Algebra als das Studium von linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen beschreiben.

Wenn wir dann die linearen Abbildungen zwischen mehreren Variablen gut genug verstanden haben, können wir uns im zweiten Teil der Analysis schließlich daran machen, die Differential- und Integralrechnung auf den Fall von mehreren Variablen auszuweiten.

Wir haben damit jetzt relativ kurz umrissen, welcher mathematische Stoff uns in dieser Vorlesung erwartet. Es wird in diesem Skript aber nicht nur darum gehen, mathematische Resultate kennenzulernen. Mindestens ebenso wichtig ist es, das „mathematische Denken“ zu lernen, d. h. die Fähigkeit zu entwickeln, mit abstrakten Konzepten umzugehen, exakte logische Schlüsse zu ziehen und Beweise zu führen. Anders als in der Schule oder im Studium z. B. ingenieurswissenschaftlicher Fächer werden wir genau darauf achten, eine „wasserdichte“ Theorie aufzubauen: Jeder neue Begriff bzw. jeder neue Satz wird nur unter Verwendung des bisher Bekannten exakt definiert bzw. bewiesen. So sind z. B. Formulierungen in dem Stil „eine Funktion wird durch eine Gerade angenähert“ oder „eine Funktion heißt stetig, wenn man sie zeichnen kann, ohne den Stift abzusetzen“ als Veranschaulichung unserer Ideen zwar sehr sinnvoll, als exakte mathematische Formulierung jedoch schlichtweg unbrauchbar. Wir werden daher in dieser Vorlesung viel exakter arbeiten als ihr es wahrscheinlich aus der Schule gewohnt seid, und es ist wichtig, dass ihr diese exakte Denkweise verinnerlicht und anzuwenden lernt. Die Mathematik ist ein riesiges Gebäude – viel größer und komplexer als ihr es euch wahrscheinlich im Moment vorstellen könnt – das ständig immer höher gebaut wird, indem schon bewiesene Sätze auf neue Fälle angewendet oder wieder für neue Beweise verwendet werden. Wir starten gerade beim Fundament dieses Gebäudes und können es uns da wirklich nicht leisten herumzupfuschen.

Diese konsequent logische und exakte Herangehensweise ist zwar am Anfang wahrscheinlich ungewohnt, hat jedoch für euch auch einen Vorteil: Etwas überspitzt formuliert erzählen wir euch während des gesamten Studiums eigentlich nur Dinge, die logisch aus dem folgen, was ihr ohnehin schon wusstet. Dadurch ist die Mathematik wahrscheinlich das Studienfach, in dem man am wenigsten auswendig lernen muss – in dem es aber im Gegenzug auch am meisten auf das *Verständnis* des Stoffes ankommt. Je besser euer Verständnis für die Mathematik wird, um so mehr Dinge werden euch letztlich einfach „klar“ werden, so dass es euch dann auch viel leichter fällt, sie zu lernen.

Dieses Verständnis für die Mathematik bekommt man aber natürlich nur durch intensiven und *aktiven* Umgang mit dem Stoff, weswegen neben dem Studium der Vorlesung auch die Bearbeitung der Übungsaufgaben besonders wichtig ist.

Heißt das alles nun, dass wir nur mit logischen Argumenten die Mathematik sozusagen „aus dem Nichts" aufbauen können? Nein, das geht natürlich nicht ... von nichts kommt nichts. Man muss am Anfang immer gewisse Dinge als gegeben annehmen, also Aussagen als wahr voraussetzen, die man nicht mehr beweist bzw. beweisen kann, und auf denen dann die gesamte Theorie beruht. Derartige Annahmen bezeichnet man als **Axiome**. Natürlich versucht man in der Mathematik, mit möglichst wenigen und sehr elementaren Axiomen auszukommen, die hoffentlich niemand anzweifeln würde. In der modernen Mathematik ist es üblich, hierfür die grundlegenden Prinzipien der Logik und Mengenlehre zu verwenden (zu denen wir auch gleich in Kapitel 1 Genaueres sagen werden).

In dieser Vorlesung wollen wir uns das Leben allerdings etwas leichter machen und zusätzlich auch die *Existenz und elementaren Eigenschaften der reellen Zahlen* axiomatisch voraussetzen (um welche Eigenschaften es sich hierbei handelt, werden wir natürlich genau angeben). Man kann zwar nur aus den Axiomen der Logik und Mengenlehre beweisen, dass die reellen Zahlen existieren und dass sie die erwarteten Eigenschaften haben, der Beweis wäre zu diesem frühen Zeitpunkt im Studium aber sehr verwirrend und würde euch auch keine großartigen neuen Erkenntnisse bringen. In diesem Sinne starten wir also sozusagen doch nicht ganz beim Fundament unseres „Gebäudes Mathematik", sondern bereits im ersten Stock.

Im weiteren Verlauf ist dieses Skript dann wie im Inhaltsverzeichnis angegeben in mehrere Teile gegliedert. Diese bauen der Reihe nach aufeinander auf, mit einer Ausnahme: Nach den in jedem Fall benötigten grundlegenden Anfangskapiteln 1 bis 3 sind die Teile „Grundlagen der Mathematik 1: Analysis" (Kapitel **??** bis **??**) und „Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra" (Kapitel 15 bis 18) *unabhängig voneinander* und können somit in beliebiger Reihenfolge oder auch (wie in den Studienplänen in der Regel vorgesehen) parallel studiert werden.

Aber jetzt genug der Vorrede ... beginnen wir nun also unser Studium der Mathematik mit den „Grundlagen der Grundlagen", den für uns wesentlichen Prinzipien der Logik und Mengenlehre.