Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 3

Abgabe: Montag, 16. November bis 16:00 Uhr

(1) (a) Im Vektorraum $\mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ betrachten wir die Polynomfunktionen f_1, f_2, f_3, f_4 mit

$$f_1(x) = 1+x, \quad f_2(x) = x+x^2, \quad f_3(x) = x^2+x^3, \quad f_4(x) = x^3+1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeige, dass die Familie (f_1, f_2, f_3, f_4) linear abhängig, die Familie (f_2, f_3, f_4) jedoch linear unabhängig ist.

(b) In $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ seien

$$U_1 = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$
$$\text{und} \quad U_2 = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

die Teilmengen aller sogenannten geraden bzw. ungeraden Funktionen. Man zeige:

- U_1 und U_2 sind Unterräume von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und $U_1 + U_2 = \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(2) (a) Es sei $(x_1, \dots, x_n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Basis eines K-Vektorraums V. Wir setzen

$$y_k := \sum_{i=1}^{k} x_i \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n.$$

Zeige durch direktes Nachprüfen der Definition, dass die Familie $(y_1, \dots, y_n)$ dann ebenfalls eine Basis von V ist.

(b) Bestimme für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ eine Basis des Unterraums $V = \mathrm{Lin}(e_i - e_j)_{1 \le i \le j \le n}$ von $\mathbb{R}^n$.