Andreas Gathmann und Marco Albert Wintersemester 2026/27

Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 2

Abgabe: Montag, 9. November bis 16:00 Uhr

(1) Zeige mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$.

(b) Ist $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ mit $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$, so ist auch $a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}$.

(2) (a) Für einen fest gewählten Körper K definieren wir auf der Menge $G := K \times (K\backslash\{0\})$ die Verknüpfung $*$ durch

$$(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (a_1 + a_2 b_1, a_2 b_2).$$

Beweise, dass $(G, *)$ eine Gruppe ist, und zeige anhand je eines Beispiels für K, dass diese Gruppe je nach gewähltem Ausgangskörper abelsch oder nicht-abelsch sein kann.

(b) Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume von $\mathbb{R}^3$?

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a-5 \\ b-5 \\ a-b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a-5 \\ b-5 \\ a-b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}.$$