3. Erste Eigenschaften der reellen Zahlen

In Notation 1.14 haben wir bereits die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ als „Menge der Punkte auf einer Geraden“ eingeführt. Man kann aber natürlich noch viel mehr Dinge mit den reellen Zahlen tun als sie als eine einfache Punktmenge zu betrachten: Man kann sie addieren, multiplizieren, die Größe von zwei Zahlen miteinander vergleichen, und noch einiges mehr. Wir wollen die Eigenschaften der reellen Zahlen in diesem und dem nächsten Kapitel exakt formalisieren, damit wir danach genau wissen, welche Eigenschaften von $\mathbb{R}$ wir in dieser Vorlesung axiomatisch voraussetzen. In der Tat werden diese Eigenschaften letztlich sogar ausreichen, um die reellen Zahlen eindeutig zu charakterisieren. Wir beginnen in diesem Kapitel aber zunächst einmal nur mit den „Grundrechenarten“, also mit der Addition und der Multiplikation sowie ihren Umkehrungen, der Subtraktion und Division.

3.A Gruppen und Körper

Die Eigenschaften von Verknüpfungen wie der Addition oder Multiplikation reeller Zahlen werden mathematisch durch die Begriffe einer Gruppe bzw. eines Körpers beschrieben, die wir jetzt einführen wollen.

Definition 3.1 (Gruppen)**.** Eine **Gruppe** ist eine Menge G zusammen mit einer „Verknüpfung“, d. h. einer Abbildung

$$*\colon G \times G \to G,\ (x,y) \mapsto x*y,$$

so dass die folgenden Eigenschaften (auch *Gruppenaxiome* genannt) gelten:

(a) (**Assoziativität**) Für alle $x,y,z \in G$ gilt $(x*y)*z = x*(y*z)$. Man schreibt diesen Ausdruck dann in der Regel auch einfach als $x*y*z$, weil die Reihenfolge der Klammerung ja egal ist.

(b) (Existenz eines neutralen Elements) Es gibt ein $e \in G$, für das $e*x = x*e = x$ für alle $x \in G$ gilt. Man nennt ein solches e ein **neutrales Element**, und verlangt davon zusätzlich:

(c) (Existenz von inversen Elementen) Für alle $x \in G$ gibt es ein $x' \in G$ mit $x'*x = x*x' = e$. Man nennt x' dann ein **inverses Element** zu x.

Wir bezeichnen eine solche Gruppe mit $(G,*)$. Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, welche Verknüpfung gemeint ist, schreiben wir oft auch einfach nur G für die Gruppe.

Gilt zusätzlich zu den obigen Eigenschaften noch

(d) (**Kommutativität**) $x*y = y*x$ für alle $x,y \in G$,

so heißt $(G,*)$ eine **kommutative** oder **abelsche Gruppe**.

Bemerkung 3.2. Manchmal wird in der Definition einer Gruppe in Teil (b) lediglich $e*x = x$ und in Teil (c) lediglich $x'*x = e$ gefordert (man spricht dann auch von einem **linksneutralen** bzw. **linksinversen** Element). Man kann jedoch unter Verwendung der übrigen Gruppenaxiome zeigen, dass in diesem Fall automatisch auch $x*e = x$ und $x*x' = e$ gelten muss, also dass linksneutrale Elemente bereits immer neutrale und linksinverse Elemente immer inverse Elemente sind [G, Satz 1.7]. Die beiden Varianten der Definition einer Gruppe stimmen also letztlich überein.

Beispiel 3.3.

(a) $(\mathbb{R},+)$ ist eine abelsche Gruppe, denn die Addition ist (wie wir axiomatisch voraussetzen werden) eine Verknüpfung auf $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

- $(x+y)+z = x+(y+z)$ für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$;
- $0 \in \mathbb{R}$ ist ein neutrales Element, denn $0+x = x+0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$;
- zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ist $-x \in \mathbb{R}$ ein inverses Element, denn $(-x)+x = x+(-x) = 0$;

- $x+y=y+x$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$.

Auf die gleiche Art sind auch $(\mathbb{Q},+)$ und $(\mathbb{Z},+)$ abelsche Gruppen, jedoch nicht $(\mathbb{N},+)$: Hier existiert zwar noch ein neutrales Element 0, aber die Zahl $1\in\mathbb{N}$ hat kein Inverses mehr, denn es gibt kein $x\in\mathbb{N}$ mit $x+1=0$.

(b) $(\mathbb{R},\cdot)$ ist keine Gruppe: Die Multiplikation ist zwar assoziativ und kommutativ und hat das neutrale Element 1, aber die Zahl 0 hat kein Inverses – denn dies müsste ja eine Zahl $x\in\mathbb{R}$ sein mit $x\cdot 0=1$.

Nimmt man jedoch die 0 aus $\mathbb{R}$ heraus, so erhält man mit $(\mathbb{R}\backslash\{0\},\cdot)$ wieder eine abelsche Gruppe, bei der das neutrale Element 1 und das zu einem x inverse Element $\frac{1}{x}$ ist. Genauso funktioniert dies für $(\mathbb{Q}\backslash\{0\},\cdot)$, aber z. B. nicht für $(\mathbb{Z}\backslash\{0\},\cdot)$: Hier gibt es zwar noch ein neutrales Element 1, aber die Zahl $2\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ hat kein Inverses mehr, denn es gibt kein $x\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$ mit $2\cdot x=1$.

(c) Hier ist noch ein Beispiel von einem ganz anderen Typ: Es sei M eine beliebige Menge und

$$G=\{f : f \text{ ist eine bijektive Abbildung von } M \text{ nach } M\}.$$

Da die Verkettung bijektiver Abbildungen nach Aufgabe 2.25 wieder bijektiv ist, definiert sie eine Verknüpfung auf G. In der Tat wird G damit zu einer Gruppe, denn die Verkettung ist assoziativ nach Lemma 2.19, die Identität id_M ist ein neutrales Element, und zu einem $f\in G$ ist die Umkehrabbildung f^{-1} aus Definition 2.20 ein inverses Element: Sie ist nach Aufgabe 2.25 selbst wieder bijektiv (also in G) und erfüllt $f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=\mathrm{id}_M$ nach Bemerkung 2.21 (a). Im Allgemeinen ist diese Gruppe jedoch nicht kommutativ.

Wir wollen nun ein paar einfache Eigenschaften von Gruppen beweisen, u. a. dass die in Definition 3.1 geforderten neutralen und inversen Elemente eindeutig sind und wir daher in Zukunft auch von *dem* neutralen und *dem* zu einem gegebenen Element inversen Element sprechen können.

Lemma 3.4 (Eigenschaften von Gruppen)**.** *Es seien $(G,*)$ eine Gruppe und $x,y\in G$.*

(a) *Es gibt genau ein neutrales Element (wie in Definition 3.1 (b)).*

(b) *Es gibt genau ein inverses Element zu x (wie in Definition 3.1 (c)).*

(c) *Sind x' und y' die inversen Elemente zu x bzw. y, so ist $y'*x'$ das inverse Element zu $x*y$.*

(d) *Ist x' das inverse Element zu x, so ist x das inverse Element zu x' („das Inverse des Inversen ist wieder das Ausgangselement“).*

Beweis.

(a) Sind e und $\tilde{e}$ neutrale Elemente, so folgt

$$\begin{aligned} e &= \tilde{e}*e && (\text{denn } \tilde{e} \text{ ist ein neutrales Element})\\ &= \tilde{e} && (\text{denn } e \text{ ist ein neutrales Element}). \end{aligned}$$

(b) Sind x' und $\tilde{x}'$ inverse Elemente zu x, so gilt

$$\begin{aligned} x' &= e*x' && (e \text{ neutrales Element})\\ &= (\tilde{x}'*x)*x' && (\tilde{x}' \text{ ist ein inverses Element zu } x)\\ &= \tilde{x}'*(x*x') && (\text{Assoziativität})\\ &= \tilde{x}'*e && (x' \text{ ist ein inverses Element zu } x)\\ &= \tilde{x}' && (e \text{ neutrales Element}). \end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$(y'*x')*(x*y)=y'*(x'*x)*y=y'*e*y=y'*y=e$$

und analog auch $(x*y)*(y'*x')=e$. Damit ist $y'*x'$ das inverse Element zu $x*y$.

(d) Die Gleichung $x'*x=x*x'=e$ besagt direkt, dass x das inverse Element zu x' ist. □

Wie wir in Beispiel 3.3 (a) und (b) gesehen haben, erlauben die reellen Zahlen *zwei* grundlegende Gruppenstrukturen: die Addition und (nach Herausnahme der 0) die Multiplikation. Diese beiden Strukturen sind jedoch nicht unabhängig voneinander, da sie durch das Distributivgesetz $(x+y)\cdot z = xz+yz$ für alle $x,y,z \in \mathbb{R}$ miteinander verbunden sind. Eine derartige Kombination zweier Gruppenstrukturen bezeichnet man als einen Körper.

Definition 3.5 (Körper)**.** Ein **Körper** ist eine Menge K zusammen mit zwei Verknüpfungen

$$+ : K \times K \to K \quad \text{(genannt } \textit{Addition}\text{)} \qquad \text{und} \qquad \cdot : K \times K \to K \quad \text{(genannt } \textit{Multiplikation}\text{)},$$

so dass die folgenden Eigenschaften (auch *Körperaxiome* genannt) gelten:

(a) $(K,+)$ ist eine abelsche Gruppe. Wir bezeichnen ihr neutrales Element mit 0 und das zu einem $x \in K$ inverse Element mit $-x$.

(b) $(K\backslash\{0\},\cdot)$ ist ebenfalls eine abelsche Gruppe. Wir bezeichnen ihr neutrales Element mit 1 und das zu einem $x \in K\backslash\{0\}$ inverse Element mit x^{-1}.

(c) (**Distributivität**) Für alle $x,y,z \in K$ gilt $(x+y)\cdot z = (x\cdot z)+(y\cdot z)$.

Mit dieser Definition wollen wir nun also axiomatisch voraussetzen:

$$\boxed{\mathbb{R} \text{ ist ein Körper.}}$$

Um Verwirrungen zu vermeiden, werden wir die beiden Verknüpfungen in einem Körper immer mit den Symbolen „+“ und „$\cdot$“ bezeichnen. Ebenso werden wir (wie ihr es natürlich gewohnt seid) vereinbaren, dass man den Punkt bei der Multiplikation auch weglassen darf und bei ungeklammerten Ausdrücken zuerst die Multiplikationen und dann die Additionen ausgeführt werden, so dass man also z. B. die Distributivität aus Definition 3.5 (c) auch als $(x+y)z = xz+yz$ schreiben kann.

Es ist jedoch wichtig zu verstehen, dass wir ab jetzt *nicht* mehr voraussetzen werden, dass Addition und Multiplikation in einem Körper wie z. B. $\mathbb{R}$ genau die Verknüpfungen sind, „an die man als Erstes denken würde“ – was auch immer das heißen mag. Stattdessen sind es einfach irgendwelche zwei Verknüpfungen, die die Eigenschaften aus Definition 3.5 haben. Unsere zukünftigen Beweise über Körper wie z. B. $\mathbb{R}$ müssen wir also ausschließlich auf diesen Eigenschaften aufbauen.

Dieser axiomatische Zugang hat zwei Vorteile:

- Zum einen wissen wir dadurch genau, welche Eigenschaften der Grundrechenarten auf den reellen Zahlen wir eigentlich voraussetzen. Es sollte schließlich klar sein, dass wir eine *exakte* Mathematik nicht auf einer *anschaulichen* Vorstellung von $\mathbb{R}$ aufbauen können. Solltet ihr euch also z. B. später einmal dafür interessieren, wie man die Existenz der reellen Zahlen beweisen kann, so wüsstet ihr dann genau, was eigentlich zu beweisen ist: nämlich die Existenz einer Menge mit genau den Eigenschaften, die wir jetzt axiomatisch voraussetzen.
- Zum anderen werdet ihr im Laufe eures Studiums noch viele weitere Körper kennenlernen, z. B. in Kapitel **??** den sehr wichtigen Körper der komplexen Zahlen. Alle Resultate, die nur auf den Körperaxiomen aufbauen, übertragen sich dann also sofort auf diese neuen Fälle, ohne dass man sich darüber noch einmal neu Gedanken machen muss.

Beispiel 3.6.

(a) Neben $\mathbb{R}$ ist auch $\mathbb{Q}$ (mit den gleichen Verknüpfungen wie auf $\mathbb{R}$) ein Körper. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ bilden mit diesen Verknüpfungen jedoch keinen Körper, da $(\mathbb{Z}\backslash\{0\},\cdot)$ nach Beispiel 3.3 (b) keine Gruppe ist. Ebenso ist $\mathbb{N}$ mit diesen Verknüpfungen kein Körper, da hier nach Beispiel 3.3 (a) bereits die Addition keine Gruppenstruktur liefert.

(b) Hier ist ein Beispiel für einen Körper, der sich ganz anders verhält als $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$: Wir definieren auf der Menge $K = \{g,u\}$ zwei Verknüpfungen durch die folgenden Tabellen.

$+$	g	u
g	g	u
u	u	g

und

$\cdot$	g	u
g	g	g
u	g	u

Dabei sind g und u einfach nur Namen für die beiden Elemente von K, die für „gerade“ und „ungerade“ stehen sollen und damit auch die Verknüpfungstafeln erklären: Wir haben z. B. $g+u$ als u definiert, weil die Addition einer geraden und einer ungeraden Zahl eine ungerade Zahl ergibt.

Man kann zeigen, dass K mit diesen beiden Verknüpfungen einen Körper bildet. Er wird in der Literatur mit $\mathbb{Z}_2$ bezeichnet, da seine Elemente die Reste ganzer Zahlen bei Division durch 2 beschreiben. Um zu beweisen, dass $\mathbb{Z}_2$ ein Körper ist, könnte man z. B. einfach die geforderten Eigenschaften für alle Elemente – es gibt ja nur zwei – explizit nachprüfen. In der Vorlesung „Algebraische Strukturen“ zeigt man allerdings, dass man die Körperaxiome hier auch viel eleganter direkt aus den Eigenschaften von $\mathbb{Z}$ folgern kann [G, Satz 7.10]. Wir wollen uns hier damit begnügen, die neutralen und inversen Elemente anzugeben:

- Das additive neutrale Element ist g, wie man leicht aus der Tabelle abliest. Im Sinne der Notationen von Definition 3.5 ist also $0 = g$. Wegen $g+g = u+u = g = 0$ sind die additiven inversen Elemente $-g = g$ und $-u = u$. Dies stimmt natürlich auch mit der Interpretation als gerade und ungerade Zahlen überein, da das Negative von einer geraden bzw. ungeraden Zahl ebenfalls wieder gerade bzw. ungerade ist.
- Das multiplikative neutrale Element in $\mathbb{Z}_2\setminus\{0\}$ ist u – in der Tat ist es ja auch das einzige Element in $\mathbb{Z}_2\setminus\{0\}$. Gemäß der Notation von Definition 3.5 ist also $1 = u$.

Beachte, dass in diesem Körper $\mathbb{Z}_2$ die Gleichung $1+1 = u+u = g = 0$ gilt. Die Körperaxiome lassen es also zu, dass man bei fortgesetzter Addition der 1 irgendwann wieder zur 0 zurück kommt. Wir werden in dieser Vorlesung nicht viel mit dem Körper $\mathbb{Z}_2$ zu tun haben – wir haben ihn hier nur als Beispiel dafür angegeben, dass die Körperaxiome noch weit davon entfernt sind, die rationalen oder reellen Zahlen eindeutig zu charakterisieren.

Anschaulich kann man die Körperaxiome so interpretieren, dass ein Körper eine Menge ist, auf der „die vier Grundrechenarten existieren und die erwarteten Eigenschaften haben“. Wir wollen nun noch ein paar weitere dieser erwarteten Eigenschaften zeigen, die bereits aus den Körperaxiomen folgen und die wir dann beim Rechnen z. B. in $\mathbb{R}$ natürlich ständig benutzen werden.

Bemerkung 3.7. Es seien K ein Körper und $x, y \in K$.

(a) Wenden wir Lemma 3.4 (c) und (d) auf die (kommutative) Addition und Multiplikation an, so sehen wir sofort, dass

$$-(x+y) = (-x)+(-y) \quad \text{und} \quad -(-x) = x$$

sowie für $x, y \neq 0$

$$(xy)^{-1} = x^{-1}\cdot y^{-1} \quad \text{und} \quad (x^{-1})^{-1} = x.$$

(b) Etwas versteckt in Definition 3.5 steht in Teil (b) u. a. die Aussage, dass die Multiplikation überhaupt eine Verknüpfung auf $K\setminus\{0\}$ ist, also dass für $x, y \in K\setminus\{0\}$ auch $xy \in K\setminus\{0\}$ gilt. Äquivalent dazu bedeutet das:

$$\text{Ist } xy = 0, \text{ so gilt } x = 0 \text{ oder } y = 0.$$

Lemma 3.8 (Eigenschaften von Körpern)**.** *In jedem Körper K gilt für alle $x, y \in K$:*

(a) $0\cdot x = 0$.

(b) $x\cdot(-y) = -(xy)$.

(c) *Für $x \neq 0$ ist* $-(x^{-1}) = (-x)^{-1}$.

Beweis.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} 0\cdot x &= (0+0)\cdot x && \text{(0 ist additives neutrales Element)} \\ &= 0\cdot x + 0\cdot x, && \text{(Distributivität)} \end{aligned}$$

woraus durch Addition des additiven Inversen von $0 \cdot x$ auf beiden Seiten die gewünschte Gleichung $0 = 0 \cdot x$ folgt.

(b) Es ist

$$\begin{aligned} x \cdot (-y) + xy &= x \cdot (-y + y) && \text{(Distributivität)} \\ &= x \cdot 0 && (-y \text{ ist additives Inverses zu } y) \\ &= 0 && \text{(nach (a))}, \end{aligned}$$

daher ist $x \cdot (-y)$ das additive Inverse zu xy, d. h. es gilt $x \cdot (-y) = -(xy)$.

(c) Doppeltes Anwenden von (b), einmal für den linken und einmal für den rechten Faktor, ergibt

$$(-(x^{-1})) \cdot (-x) = -(x^{-1} \cdot (-x)) = -(-(x^{-1} \cdot x)) = -(-1) \overset{3.7\,(a)}{=} 1.$$

Also ist $-(x^{-1})$ das multiplikative Inverse zu $-x$, d. h. es ist $-(x^{-1}) = (-x)^{-1}$. □

Notation 3.9. In einem Körper K verwendet man üblicherweise die folgenden Notationen, von denen euch die meisten sicher bekannt sein werden:

(a) Für $x, y \in K$ setzt man $x - y := x + (-y)$. Ist $y \neq 0$, so setzt man $\frac{x}{y} := x \cdot y^{-1}$.

(b) Für $x \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ definiert man die n-te **Potenz** von x als

$$x^n := \underbrace{x \cdot \cdots \cdot x}_{n\text{-mal}},$$

wobei dieser Ausdruck für $n = 0$ als $x^0 := 1$ zu verstehen ist. Insbesondere legen wir also auch $0^0 := 1$ fest. Beachte, dass aus dieser Definition (und der Kommutativität der Multiplikation) unmittelbar die Potenzrechenregeln

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n} \quad \text{und} \quad (xy)^n = x^n \cdot y^n$$

für alle $x, y \in K$ folgen. Ist $x \neq 0$, so definiert man zusätzlich Potenzen mit negativen ganzzahligen Exponenten durch $x^{-n} := (x^{-1})^n$.

Beachte, dass auch in einem beliebigen Körper K die Exponenten einer Potenz stets *ganze Zahlen* sind und keine Elemente aus K. Eine Potenz x^y für $x, y \in K$ lässt sich im Allgemeinen nicht definieren (auch wenn dies für $K = \mathbb{R}$ in vielen Fällen möglich ist, siehe Definition **??**).

(c) Manchmal möchte man mehrere Elemente $x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ in einem Körper (oder allgemeiner in einer additiv geschriebenen abelschen Gruppe) aufsummieren, die durch eine ganzzahlige Laufvariable indiziert werden, die von einem $m \in \mathbb{Z}$ bis zu einem $n \in \mathbb{Z}$ (mit Schrittweite 1, und $n \geq m$) läuft. Man schreibt dies dann als

$$\sum_{i=m}^{n} x_i := x_m + x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_n$$

(also mit einem großen griechischen Sigma, das an das Wort „Summe“ erinnern soll). So steht z. B.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \qquad (*)$$

für die Summe aller Quadratzahlen bis n^2. Natürlich ist der Name der Laufvariablen dabei egal, und der Ausdruck $(*)$ hängt nicht von einem i ab (wie man auf der rechten Seite ja auch sieht). Außerdem kann man die Laufvariable verschieben, ohne den eigentlichen Ausdruck zu ändern: Setzt man z. B. $i = j + 1$, also $j = i - 1$, in der obigen Summe $(*)$, so läuft j dort von 0 bis $n - 1$, wenn i von 1 bis n läuft, und wir können dieselbe Summe auch schreiben als

$$\sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2.$$

Natürlich kann man diesen Ausdruck nun auch wieder genauso gut mit dem Buchstaben i statt j als $\sum_{i=0}^{n-1}(i+1)^2$ schreiben, oder den Index um mehr als 1 in die eine oder andere Richtung verschieben. Also:

> Der Wert einer Summe ändert sich nicht, wenn man zur Laufvariablen im zu summierenden Ausdruck eine Konstante addiert, und dafür von der Ober- und Untergrenze der Summe diese Konstante abzieht.

Wir sagen in diesem Fall, dass die neue Darstellung der Summe durch eine **Indexverschiebung** (im Beispiel oben $i \mapsto i+1$) aus der alten hervorgeht.

Analog schreibt man

$$\prod_{i=m}^{n} x_i := x_m \cdot x_{m+1} \cdot x_{m+2} \cdot \cdots \cdot x_n$$

(mit einem großen griechischen Pi für das Produkt), wenn man die Körperelemente multiplizieren statt addieren möchte. Ist schließlich die Obergrenze einer Summe oder eines Produkts kleiner als die Untergrenze (man spricht dann von der **leeren Summe** bzw. dem **leeren Produkt**), so definiert man dies als

$$\sum_{i=m}^{n} x_i := 0 \quad \text{und} \quad \prod_{i=m}^{n} x_i := 1 \quad \text{für } n < m,$$

also als das additive bzw. multiplikative neutrale Element.

(d) Ist n eine natürliche Zahl, so fasst man diese oft auch als das Element

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1+\cdots+1}_{n\text{-mal}}$$

von K auf. Im Fall $K=\mathbb{R}$ ist dies dann einfach die natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ und liefert somit keine neue Notation, aber z. B. in $K=\mathbb{Z}_2$ aus Beispiel 3.6 (b) ist $2 = 1+1 = 0$.

Aufgabe 3.10. Zeige, dass in jedem Körper K die üblichen Rechenregeln

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{xw+yz}{yw} \quad \text{und} \quad \frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}$$

für Brüche gelten, wobei $x, y, z, w \in K$ mit $y, w \neq 0$.

Aufgabe 3.11. Es sei $a \in \mathbb{R}$ fest gegeben. Wir definieren auf $\mathbb{R}^2$ eine „Addition“ und „Multiplikation“ durch

$$(x_1,x_2)+(y_1,y_2) := (x_1+y_1, x_2+y_2) \quad \text{und} \quad (x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2) := (x_1y_1 + ax_2y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Man prüft leicht durch explizite Rechnung nach, dass $\mathbb{R}^2$ mit dieser Addition eine kommutative Gruppe mit neutralem Element $(0,0)$ ist, dass auch die Multiplikation kommutativ ist, und dass diese beiden Operationen das Distributivgesetz erfüllen – ihr solltet euch kurz überlegen, warum das so ist, braucht das aber nicht aufzuschreiben. Man zeige stattdessen:

(a) Die Multiplikation ist assoziativ und besitzt ein neutrales Element.

(b) Im Fall $a=-1$ ist $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ ein Körper, im Fall $a=1$ jedoch nicht.

(Für $a=-1$ ist $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ der sogenannte Körper der komplexen Zahlen, den wir in Kapitel **??** noch genau untersuchen werden.)

Aufgabe 3.12. Zu einem Körper K und einer Menge D mit $|D| \geq 2$ sei

$$V = \{f : f \text{ ist eine Abbildung von } D \text{ nach } K\}$$

die Menge aller reellwertigen Funktionen auf D. Für $f, g \in V$ definieren wir die Addition $f+g$ und Multiplikation $f \cdot g$ dieser Funktionen punktweise durch

$$f+g\colon D \to K,\ x \mapsto f(x)+g(x) \quad \text{und} \quad f\cdot g\colon D \to K,\ x \mapsto f(x)\cdot g(x).$$

(a) Zeige, dass V mit dieser Addition eine abelsche Gruppe ist.

(b) Ist V mit dieser Addition und Multiplikation ein Körper?

04

3.B Vollständige Induktion

Häufig möchte man in der Mathematik Aussagen beweisen, die von einer natürlichen Zahl abhängen – z. B. bei Formeln, die Summen oder Produkte wie in Notation 3.9 mit variablen Unter- oder Obergrenzen beinhalten. Die einfachste und bekannteste solcher Aussagen ist vermutlich die folgende Formel für die Summe aller natürlichen Zahlen bis zu einer gegebenen Obergrenze.

Satz 3.13 (Summenformel von Gauß). *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beispiel 3.14. Für $n = 5$ ist z. B.

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5 = 15 = \frac{5 \cdot 6}{2}.$$

Um derartige Aussagen zu beweisen, ist oft das Beweisverfahren der **(vollständigen) Induktion** nützlich, das wir jetzt einführen wollen.

Angenommen, wir wollen (wie z. B. in Satz 3.13) eine Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen. Dann können wir dies tun, indem wir die folgenden beiden Dinge zeigen:

(a) (**Induktionsanfang**) Die Aussage $A(0)$ ist wahr.

(b) (**Induktionsschritt**) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$, d. h. *wenn* die Aussage $A(n)$ für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ gilt (die „Induktionsannahme“ bzw. „Induktionsvoraussetzung“), *dann* gilt auch die Aussage $A(n+1)$ (der „Induktionsschluss“).

Haben wir diese beiden Dinge gezeigt, so folgt daraus nämlich die Gültigkeit von $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$: Die Aussage $A(0)$ haben wir mit dem Induktionsanfang gezeigt, und durch fortgesetztes Anwenden des Induktionsschritts $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für $n = 0, 1, 2, \dots$ erhalten wir dann auch

$$A(0) \Rightarrow A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow A(3) \Rightarrow \cdots,$$

also die Gültigkeit von $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Derartige Induktionsbeweise sind immer dann sinnvoll, wenn die Aussagen $A(n)$ und $A(n+1)$ „ähnlich genug“ sind, so dass es beim Beweis von $A(n+1)$ hilft, die Gültigkeit von $A(n)$ voraussetzen zu dürfen.

Mit diesem Verfahren können wir nun die Summenformel aus Satz 3.13 beweisen:

Beweis von Satz 3.13. Wir zeigen die Formel mit Induktion über n.

Induktionsanfang ($n = 0$): Für $n = 0$ stimmen die beiden Seiten der zu zeigenden Gleichung überein, denn es ist

$$\sum_{k=1}^{0} k = 0 = \frac{0 \cdot (0+1)}{2}.$$

Induktionsschritt ($n \to n+1$): Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir an, dass die zu beweisende Formel für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ richtig ist, d. h. dass

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

gilt. (Beachte, dass wir diese Gleichung nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ voraussetzen – dies wäre ja schon die gesamte zu zeigende Aussage!) Wir müssen zeigen, dass die entsprechende Gleichung dann auch für $n+1$ gilt, also dass

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Dies ergibt sich nun leicht aus der folgenden Rechnung:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) && \text{(Abspalten des letzten Summanden für } k = n+1)\\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) && \text{(nach Induktionsvoraussetzung)}\\ &= (n+1)\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Damit ist der Satz mit vollständiger Induktion bewiesen. □

Bemerkung 3.15. Offensichtlich erlaubt das Beweisverfahren der vollständigen Induktion die folgenden Abwandlungen:

(a) Im Induktionsschritt kann man, wenn es hilfreich ist, beim Beweis der Aussage $A(n+1)$ nicht nur die direkt vorangegangene Aussage $A(n)$, sondern *alle bereits gezeigten Aussagen* $A(0), A(1), \ldots, A(n)$ voraussetzen.

(b) Möchte man die Aussage $A(n)$ nicht für alle $n \in \mathbb{N}$, sondern für alle $n \in \mathbb{Z}$ ab einem gewissen Startwert $n_0 \in \mathbb{Z}$ zeigen, so kann man als Induktionsanfang die Aussage $A(n_0)$ zeigen, und im Induktionsschritt dann die Folgerung $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ für alle $n \geq n_0$.

Aufgabe 3.16. Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{(a)}\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}, \qquad \text{(b)}\ \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n+k}\right) = 2 - \frac{1}{n+1}.$$

Aufgabe 3.17. Zeige mit vollständiger Induktion: Ist $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $a + \frac{1}{a} \in \mathbb{Z}$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ auch $a^n + \frac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}$.

3.C Polynomfunktionen

Als erste Anwendung der Körpereigenschaften wollen wir zum Abschluss dieses Kapitels die euch sicher schon aus der Schule bekannten Polynomfunktionen behandeln – also die Funktionen, die sich aus den grundlegenden Körperoperationen Addition und Multiplikation bilden lassen.

Definition 3.18 (Polynomfunktionen und Nullstellen)**.** Es seien K ein Körper und $f\colon K \to K$ eine Funktion.

(a) Ist f von der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{für alle } x \in K$$

mit gewissen $a_0, \ldots, a_n \in K$, so sagt man, dass f eine **Polynomfunktion** mit **Koeffizienten** $a_0, \ldots, a_n$ ist. Ist n dabei so gewählt, dass der erste Koeffizient a_n ungleich Null ist, so heißt f eine Polynomfunktion vom **Grad** n und mit **Leitkoeffizient** a_n. Ist der Leitkoeffizient 1, so heißt f eine **normierte** Polynomfunktion.

Sind in der obigen Darstellung alle Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ gleich 0 (und ist f damit die Nullfunktion), so nennen wir f formal eine Polynomfunktion vom Grad $-\infty$. In diesem Fall hat f keinen Leitkoeffizienten.

(b) Ist $x_0 \in K$ mit $f(x_0) = 0$, so nennt man x_0 eine **Nullstelle** von f.

Das Besondere an Nullstellen von Polynomfunktionen ist, dass man sie wie im folgenden Satz als Linearfaktoren abspalten kann.

Satz 3.19 (Abspalten von Nullstellen in Polynomfunktionen)**.** *Es seien K ein Körper und $f\colon K \to K$ eine Polynomfunktion vom Grad $n \in \mathbb{N}$.*

(a) *Ist $x_0 \in K$ eine Nullstelle von f, so gibt es eine Polynomfunktion $g\colon K \to K$ vom Grad $n-1$ mit $f(x) = (x-x_0)\,g(x)$ für alle $x \in K$ (d. h. man kann „den Linearfaktor $x-x_0$ abspalten“).*

(b) *Die Funktion f hat höchstens n Nullstellen.*

Beweis. Wir zeigen die beiden Aussagen mit Induktion über n. Der Beweis von (a) ist dabei konstruktiv, d. h. er gibt auch ein Verfahren an, wie g berechnet werden kann (siehe Beispiel 3.20).

Der Induktionsanfang für $n = 0$ ist trivial, denn f ist dann eine Konstante ungleich 0 und hat somit keine Nullstellen. Für den Induktionsschluss nehmen wir an, dass die Aussagen des Satzes bis zu einem gegebenen n gelten, und betrachten $f\colon K \to K$, $x \mapsto a_{n+1}x^{n+1} + \dots + a_1 x + a_0$ vom Grad $n+1$, also mit $a_{n+1} \neq 0$.

(a) Wir definieren eine Polynomfunktion $\tilde{f}\colon K \to K$ durch

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &:= f(x) - a_{n+1}x^n(x-x_0)\\ &= a_{n+1}x_0x^n + a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0\end{aligned}$$

für alle x. Ist $\tilde{f}$ die Nullfunktion, so sind wir fertig, da dann ja $f(x) = a_{n+1}x^n(x-x_0)$ für alle $x \in K$ gilt. Andernfalls ist $\tilde{f}$ nach Konstruktion eine Polynomfunktion vom Grad höchstens n (der x^{n+1}-Term hebt sich ja gerade heraus), die immer noch die Nullstelle x_0 hat. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann also eine Polynomfunktion $\tilde{g}\colon K \to K$ vom Grad höchstens $n-1$ mit $\tilde{f}(x) = (x-x_0)\,\tilde{g}(x)$ für alle $x \in K$, und somit ist

$$f(x) = a_{n+1}x^n(x-x_0) + \tilde{f}(x) = (x-x_0)\cdot\underbrace{(a_{n+1}x^n + \tilde{g}(x))}_{=:g(x)}$$

für alle $x \in K$, wobei g offensichtlich vom Grad n ist.

(b) Hat f keine Nullstelle, so sind wir fertig. Andernfalls wählen wir eine Nullstelle x_0 von f und schreiben $f(x) = (x-x_0)\,g(x)$ für alle $x \in K$ wie in (a) mit einer Polynomfunktion g vom Grad n. Nach Induktionsvoraussetzung hat g höchstens n Nullstellen, und nach Bemerkung 3.7 (b) sind die Nullstellen von f genau x_0 zusammen mit den Nullstellen von g. Also hat f höchstens $n+1$ Nullstellen. Damit ist die Behauptung mit Induktion bewiesen. □

Beispiel 3.20 (Polynomdivision)**.** Das Verfahren aus dem Beweis von Satz 3.19 (a) wird als *Polynomdivision* [G, Satz 10.19] bezeichnet: Man subtrahiert fortlaufend geeignete Vielfache von $x-x_0$ von f, so dass sich der jeweils höchste Term von f weghebt, und sammelt die dabei verwendeten Faktoren in g. Das folgende Schema, das genauso aussieht wie eine normale schriftliche Division, verdeutlicht dieses Verfahren am Beispiel der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 3x - 4$ mit Nullstelle $x_0 = 1$, die wir als $f(x) = (x-1)\,g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ schreiben wollen. Das Ergebnis ist in diesem Fall $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x+4$.

$$\begin{array}{lrcl}
f(x) \longrightarrow & (x^2+3x-4) & : (x-1) = & x+4 \longleftarrow g(x)\\
& -\,(x^2-\ x) & \longleftarrow \cdot x & \\
\tilde{f}(x) \longrightarrow & \quad 4x-4 & & \\
& -\quad (4x-4) & \longleftarrow \cdot 4 & \\
& \quad 0 & &
\end{array}$$

Bemerkung 3.21. Satz 3.19 liefert uns zwar die neue Funktion nach dem Abspalten des Linearfaktors, er sagt uns hingegen nicht, wie wir überhaupt erst einmal eine Nullstelle von f finden können, oder ob es überhaupt Nullstellen gibt (die reelle Polynomfunktion $f(x) = x^2 + 1$ hat ja z. B. keine Nullstellen). In der Tat gibt es im Allgemeinen kein Verfahren, wie man Nullstellen von Polynomfunktionen exakt berechnen kann! Genauer gesagt gilt:

- Für Polynomfunktionen vom Grad höchstens 4 gibt es explizite Verfahren zur exakten Bestimmung der Nullstellen (für Grad 1 ist das klar, für Grad 2 gibt es die bekannte „p-q-Formel“ bzw. die quadratische Ergänzung, und für Grad 3 bzw. 4 sind die Formeln so lang, dass man im Allgemeinen nicht mehr mit ihnen arbeiten möchte).

- Für Polynomfunktionen vom Grad größer als 4 kann man beweisen(!), dass es keine derartigen Verfahren zur exakten Bestimmung der Nullstellen geben kann (das beweist man z. B. in der Vorlesung „Einführung in die Algebra“, die ihr im nächsten Studienjahr hören könnt). Aber:
- Für reelle Polynomfunktionen beliebigen Grades gibt es zumindest numerische Verfahren, die die Nullstellen (mit beliebiger Genauigkeit) näherungsweise bestimmen können.

Zum Schluss wollen wir nun noch zwei wichtige Konzepte für Polynomfunktionen untersuchen, die ihr beide im reellen Fall vielleicht schon aus der Schule kennt: den sogenannten Koeffizientenvergleich (also dass eine Polynomfunktion eindeutig ihre Koeffizienten bestimmt) und die Vielfachheit von Nullstellen. Es stellt sich jedoch heraus, dass man hierfür im allgemeinen Fall die Voraussetzung benötigt, dass der betrachtete Körper unendlich viele Elemente besitzt.

Lemma 3.22 (**Koeffizientenvergleich**). *Es seien K ein Körper mit $|K| = \infty$ und $f\colon K \to K$ eine Polynomfunktion mit zwei Darstellungen*

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 \quad \text{für alle } x \in K$$

für gewisse $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in K$. (Beachte, dass wir dabei in beiden Darstellungen den gleichen höchsten Exponenten n wählen können, da wir nicht $a_n \neq 0$ und $b_n \neq 0$ vorausgesetzt haben.)

Dann gilt bereits $a_i = b_i$ für alle $i = 0, \ldots, n$. Es ist also nicht möglich, „eine Polynomfunktion auf zwei verschiedene Arten hinzuschreiben“.

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Polynomfunktion

$$K \to K,\ x \mapsto (a_n - b_n)x^n + \cdots + (a_1 - b_1)x + (a_0 - b_0) = f(x) - f(x) = 0$$

die Nullfunktion auf K. Da sie damit wegen $|K| = \infty$ unendlich viele Nullstellen besitzt, kann sie nach Satz 3.19 (b) nur vom Grad $-\infty$ sein. Also sind alle Koeffizienten dieser Polynomfunktion gleich 0, d. h. es ist $a_i = b_i$ für alle $i = 0, \ldots, n$. □

Bemerkung und Notation 3.23 (Polynome). Die Voraussetzung $|K| = \infty$ in Lemma 3.22 ist wirklich notwendig: So sind für $K = \mathbb{Z}_2$ wie in Beispiel 3.6 (b) z. B. $x \mapsto x$ und $x \mapsto x^2$ dieselbe Funktion, da sie beide 0 auf 0 und 1 auf 1 abbilden und in $\mathbb{Z}_2$ keine weiteren Elemente existieren.

In der Literatur bezeichnet man einen formalen Ausdruck der Form $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ mit $a_0, \ldots, a_n \in K$ als ein **Polynom** über K [G, Kapitel 9]. Jedes solche Polynom bestimmt natürlich eine Polynomfunktion von K nach K, allerdings können verschiedene Polynome wie im eben angegebenen Beispiel durchaus dieselbe Polynomfunktion definieren: Über $\mathbb{Z}_2$ sind x und x^2 verschiedene Polynome, sie bestimmen aber dieselbe Polynomfunktion.

Mit dieser Notation ist die Aussage von Lemma 3.22 also, dass Polynome und Polynomfunktionen im Fall von unendlichen Definitionsmengen dasselbe sind. Da wir Polynomfunktionen im Folgenden in der Regel nur in diesem Fall unendlicher Definitionsmengen benötigen, werden wir die Begriffe Polynom und Polynomfunktion oft synonym verwenden. Wegen der Eindeutigkeit der Koeffizienten sind dann auch der Grad (und der Leitkoeffizient) einer Polynomfunktion f wie in Definition 3.18 (a) eindeutig bestimmt. Wir können daher eine Bezeichnung dafür einführen:

Definition 3.24 (Grad eines Polynoms). Wir bezeichnen den **Grad** eines Polynoms f (über einem Körper mit unendlich vielen Elementen) mit $\deg f \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ (vom englischen Wort „degree“).

In den Fällen $\deg f = 1$ bzw. $\deg f = 2$ nennt man f ein **lineares** bzw. **quadratisches Polynom**.

Satz und Definition 3.25 (Vielfachheit von Nullstellen). *Es seien K ein Körper mit $|K| = \infty$ und $f\colon K \to K$ eine Polynomfunktion, die nicht die Nullfunktion ist. Dann lässt sich f (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig als*

$$f(x) = g(x) \cdot (x - x_1)^{a_1} \cdot \cdots \cdot (x - x_k)^{a_k} \quad \text{für alle } x \in K$$

*schreiben, wobei $x_1, \ldots, x_k \in K$ die verschiedenen Nullstellen von f sind, $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt, und g ein Polynom ohne Nullstellen ist. In dieser Darstellung nennt man a_i für $i = 1, \ldots, k$ die **Vielfachheit***

*der Nullstelle x_i von f (in der Literatur sind auch die Bezeichnungen **Ordnung** und **Multiplizität** der Nullstelle üblich).*

Beweis. Die Existenz einer solchen Darstellung ergibt sich sofort durch fortgesetztes Abspalten von Nullstellen gemäß Satz 3.19 (a). Wir zeigen nun die Eindeutigkeit mit Induktion über den Grad $n := \deg f$ des Polynoms. Dabei ist der Induktionsanfang für $n = 0$ trivial, denn dann hat f keine Nullstellen, und es ist zwangsläufig $k = 0$ und $g = f$.

Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ bemerken wir zuerst, dass $x_1, \dots, x_k$ natürlich in jedem Fall als die Nullstellen von f eindeutig bestimmt sind. Wir nehmen also an, dass wir zwei Darstellungen

$$f(x) = g(x) \cdot (x-x_1)^{a_1} \cdot \dots \cdot (x-x_k)^{a_k} = h(x) \cdot (x-x_1)^{b_1} \cdot \dots \cdot (x-x_k)^{b_k}$$

eines Polynoms vom Grad $n+1$ wie in der Behauptung des Satzes haben. Im nullstellenfreien Fall $k = 0$ sind wir natürlich bereits fertig. Andernfalls liefert Division durch $x - x_1$ für alle $x \in K \setminus \{x_1\}$ (wir müssen x_1 hier herausnehmen, da wir sonst durch 0 teilen würden!)

$$\begin{aligned} &g(x) \cdot (x-x_1)^{a_1-1} \cdot (x-x_2)^{a_2} \cdot \dots \cdot (x-x_k)^{a_k} \\ &= h(x) \cdot (x-x_1)^{b_1-1} \cdot (x-x_2)^{b_2} \cdot \dots \cdot (x-x_k)^{b_k}. \end{aligned}$$

Die Differenz beider Seiten dieser Gleichung ist also ein Polynom mit den unendlich vielen Nullstellen $K \setminus \{x_1\}$, und muss damit nach Satz 3.19 (b) schon das Nullpolynom sein – d. h. die Gleichung gilt sogar für alle $x \in K$. Wir haben also wieder zwei Darstellungen eines Polynoms, diesmal vom Grad n, und daher müssen diese Darstellungen nach der Induktionsvoraussetzung bereits übereinstimmen. Also gilt $g = h$, $a_1 - 1 = b_1 - 1$, $a_2 = b_2$, …, $a_k = b_k$, und damit stimmen auch die beiden ursprünglichen Darstellungen von f überein. □

Aufgabe 3.26. Bestimme die Nullstellen des reellen Polynoms $x^4 + 3x^3 - 4x$ und ihre Vielfachheiten.

Aufgabe 3.27. Es sei f ein reelles Polynom mit $f(x) = x^3$ für alle $x \in \{1, 2, 3, \dots, 8\}$. Welchen Grad kann f haben?

Aufgabe 3.28. Es sei f das reelle Polynom mit $f(x) = (x^2 - x + 1)^{2025}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimme die Summe aller Koeffizienten von f.

(b) Bestimme die Summe aller Koeffizienten von geraden Potenzen von x in f.

Aufgabe 3.29.

(a) Bestimme alle reellen Polynome f mit $x f(x+1) = (x-1) f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Bestimme alle reellen Polynome f mit $x f(x-1) = (x-1) f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

05