Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 9

Abgabe: Montag, 13. Januar bis 16:00 Uhr

(1) Im Vektorraum $V = \mathrm{Pol}_3(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller reellen Polynome vom Grad höchstens 3 betrachten wir die Unterräume

$$U_1 = \mathrm{Lin}\,(1+x-2x^2,\, 2+3x+x^2+x^3,\, 3+4x-x^2+x^3)$$

und

$$U_2 = \{f \in V : f(-1) = 0 \text{ und } f'(2) = f(2)\},$$

wobei f' die Ableitung von f bezeichnet.

(a) Bestimme Basen von U_2 und $U_1 + U_2$.

(b) Zeige, dass es ein $f \in U_1 + U_2$ gibt, das eine doppelte Nullstelle bei 0 hat. Welche weitere Nullstelle hat dieses Polynom?

(Damit wir eure Rechnungen besser überprüfen können, verwendet bitte die Basis $(1,x,x^2,x^3)$ von V.)

(2) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $f\colon V \to V$ heißt *Projektion*, wenn $f \circ f = f$.

(a) Gib ein Beispiel für einen Vektorraum V und eine Projektion $f\colon V \to V$ an, bei der sowohl $\mathrm{Ker}\, f$ als auch $\mathrm{Im}\, f$ nicht-triviale Unterräume (also weder gleich $\{0\}$ noch gleich V) sind.

(b) Es seien $f, g\colon V \to V$ zwei Projektionen. Beweise, dass $f + g$ genau dann ebenfalls eine Projektion ist, wenn $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$ und $\mathrm{Im}\, g \subset \mathrm{Ker}\, f$.

Gilt diese Aussage auch für Vektorräume über einem beliebigen Körper (Beweis oder Gegenbeispiel)?