Andreas Gathmann und Oliver Bachtler Wintersemester 2024/25

Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 8

Abgabe: Montag, 6. Januar bis 16:00 Uhr

(1) (a) Untersuche, für welche $a,b,c \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax_2^2 + b^2x_2 \\ cx_1x_2 \end{pmatrix}$$

linear ist.

(b) Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Ferner sei U ein Unterraum von V mit $U \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ und $U + \operatorname{Ker} f = V$.
Zeige, dass die Abbildung $f|_U\colon U \to \operatorname{Im} f$ ein Isomorphismus ist.

(2) Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ betrachten wir die Abbildung

$$f\colon\ \mathrm{Pol}_{n-1}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n,\ \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(1) \\ \vdots \\ \varphi(n) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass f linear ist.

(b) Bestimme Kern und Bild von f, und gib dabei von jedem Element von $\operatorname{Im} f$ explizit ein Urbild an.

Das Team der Linearen Algebra
wünscht euch frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch
ins neue Jahr!