Andreas Gathmann und Oliver Bachtler Wintersemester 2024/25

Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 7

Abgabe: Montag, 16. Dezember bis 16:00 Uhr

(1) (a) In $\mathbb{R}^4$ seien

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $A = (a_1 \,|\, a_2 \,|\, a_3 \,|\, a_4) \in K^{4\times 4}$, $U_1 = \operatorname{Lin}(a_1, a_3)$ und $U_2 = \operatorname{Lin}(a_2, a_4)$. Man bestimme ...

(i) jeweils eine Basis von $\operatorname{Im} A$ und $\operatorname{Ker} A$;

(ii) eine Basis von $U_1 \cap U_2$;

(iii) alle Lösungen des Gleichungssystems $Ax = b$.

(b) Untersuche, für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

invertierbar ist, und berechne in diesen Fällen die inverse Matrix A^{-1} in Abhängigkeit von λ.

(2) Es seien $m, n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $A \in K^{m\times n}$. Wir wählen eine beliebige Basis $(x_1, \dots, x_k)$ von $\operatorname{Ker} A$ und ergänzen sie zu einer Basis $(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l)$ von K^n.

Zeige durch direktes Nachprüfen der Definitionen, dass $(Ay_1, \dots, Ay_l)$ dann eine Basis von $\operatorname{Im} A$ ist.

Insbesondere erhalten wir auf diese Art also einen alternativen Beweis der Dimensionsformel für Matrizen

$$\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = n.$$