Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 6

Abgabe: Montag, 9. Dezember bis 16:00 Uhr

Ihr dürft bereits die folgende Aussage verwenden, die zu Beginn der nächsten Vorlesung gezeigt wird: Bringt man eine Matrix A mit elementaren Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform, so ist die Anzahl Stufen in dieser Zeilenstufenform gleich dem Rang von A.

(1) (a) Bringe die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

mit elementaren Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform.

(b) Es seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.
Bestimme den Rang der Matrix $(a_i + a_j)_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in Abhängigkeit von $a_1, \ldots, a_n$.

(2) (a) Für $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_{>0}$ und gegebene Matrizen $A_1 \in K^{n_1 \times n_1}$, $A_2 \in K^{n_2 \times n_2}$ und $B \in K^{n_1 \times n_2}$ setzen wir

$$A := \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad \in K^{n \times n}$$

mit $n = n_1 + n_2$.
Zeige, dass A genau dann invertierbar ist, wenn A_1 und A_2 invertierbar sind, und bestimme in diesem Fall die inverse Matrix A^{-1} aus A_1, A_2 und B.

(b) Es sei $A \in K^{m \times n}$ eine Matrix vom Rang r.
Beweise, dass es dann Matrizen $B \in K^{m \times r}$ und $C \in K^{r \times n}$ vom Rang r gibt mit $A = BC$.
(Hinweis: Zeige die Aussage zunächst für den Fall, dass A in Zeilenstufenform ist.)