Andreas Gathmann und Oliver Bachtler Wintersemester 2024/25

Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 5

Abgabe: Montag, 2. Dezember bis 16:00 Uhr

(1) Es seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $A \in K^{n \times n}$.

(a) Zeige, dass
$$U := \{B \in K^{n \times n} : AB = BA\}$$
ein Unterraum von $K^{n\times n}$ ist, und bestimme im Fall $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ eine Basis von U.

(b) Zeige, dass
$$\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker}(A^2) = \operatorname{Ker} A.$$

(2) Untersuche die folgenden Familien B auf lineare Unabhängigkeit im $\mathbb{R}$-Vektorraum V:

(a) $B = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_{12})$ in $V = \operatorname{Pol}_8(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x-a)^8$.

(b) $B = (x, Ax, A^2x, \dots, A^kx)$ in $V = \mathbb{R}^n$ mit $k, n \in \mathbb{N}_{>0}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $A^kx \neq 0$ und $A^{k+1}x = 0$.

(c) $B = (g_a)_{a\in\mathbb{R}}$ in $V = \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit
$$g_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq a, \\ x-a & \text{für } x \geq a. \end{cases}$$