Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 4

Abgabe: Montag, 25. November bis 16:00 Uhr

(1) (a) Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Unterräume

$$U_1 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad U_2 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(i) Bestimme eine Basis von $U_1 + U_2$.

(ii) Bestimme einen zweidimensionalen Unterraum U von $\mathbb{R}^4$ mit $U + U_1 = \mathbb{R}^4$.

(b) Es seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume über demselben Körper. Zeige, dass dann $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$ gilt.

(2) (a) Es seien V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \leq V$ mit $\dim V = 6$, $\dim U_1 = 5$ und $\dim U_2 = 3$. Welche Dimension kann $U_1 \cap U_2$ haben? Gib für jede solche Möglichkeit ein konkretes Beispiel für U_1, U_2 und V an.

(b) Zeige für beliebige Unterräume $U_1, \dots, U_k$ eines n-dimensionalen Vektorraums V, dass

$$\dim(U_1 \cap \cdots \cap U_k) \geq \sum_{i=1}^{k} \dim U_i - (k-1)\,n.$$