

Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 3

Abgabe: Montag, 18. November bis 16:00 Uhr

- (a) Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume von \mathbb{R}^3 ?

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a-5 \\ b-5 \\ a-b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}, \quad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a-5 \\ b-5 \\ a-b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}.$$

- (b) In $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ seien

$$U_1 = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$$

und $U_2 = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$

die Teilmengen aller sogenannten geraden bzw. ungeraden Funktionen. Man zeige:

- (i) U_1 und U_2 sind Unterräume von $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
 (ii) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und $U_1 + U_2 = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- (a) Im Vektorraum $\text{Pol}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ betrachten wir die Polynomfunktionen f_1, f_2, f_3, f_4 mit

$$f_1(x) = 1 + x, \quad f_2(x) = x + x^2, \quad f_3(x) = x^2 + x^3, \quad f_4(x) = x^3 + 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeige, dass die Familie (f_1, f_2, f_3, f_4) linear abhängig, die Familie (f_2, f_3, f_4) jedoch linear unabhängig ist.

- (b) Es sei (x_1, \dots, x_n) mit $n \in \mathbb{N}$ eine Basis eines K -Vektorraums V . Wir setzen

$$y_k := \sum_{i=1}^k x_i \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n.$$

Zeige durch direktes Nachprüfen der Definition, dass die Familie (y_1, \dots, y_n) dann ebenfalls eine Basis (also ein linear unabhängiges Erzeugendensystem) von V ist.