Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 3

Abgabe: Montag, 18. November bis 16:00 Uhr

(1) (a) Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume von $\mathbb{R}^3$?

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a-5 \\ b-5 \\ a-b \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a-5 \\ b-5 \\ a-b \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}.$$

(b) In $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ seien

$$\begin{aligned} & U_1 = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \\ \text{und} \quad & U_2 = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

die Teilmengen aller sogenannten geraden bzw. ungeraden Funktionen. Man zeige:

(i) U_1 und U_2 sind Unterräume von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(ii) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und $U_1 + U_2 = \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(2) (a) Im Vektorraum $\mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ betrachten wir die Polynomfunktionen f_1, f_2, f_3, f_4 mit

$$f_1(x) = 1+x, \quad f_2(x) = x+x^2, \quad f_3(x) = x^2+x^3, \quad f_4(x) = x^3+1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeige, dass die Familie (f_1, f_2, f_3, f_4) linear abhängig, die Familie (f_2, f_3, f_4) jedoch linear unabhängig ist.

(b) Es sei $(x_1, \dots, x_n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ eine Basis eines K-Vektorraums V. Wir setzen

$$y_k := \sum_{i=1}^{k} x_i \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n.$$

Zeige durch direktes Nachprüfen der Definition, dass die Familie $(y_1, \dots, y_n)$ dann ebenfalls eine Basis (also ein linear unabhängiges Erzeugendensystem) von V ist.