Andreas Gathmann und Oliver Bachtler Wintersemester 2024/25

Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 13

(keine Abgabe)

Dies ist das letzte Übungsblatt, es bezieht sich auf die beiden Vorlesungstermine zu Determinanten (31. Januar und 7. Februar). Es dient nur zur Klausurvorbereitung und wird nicht mehr abgegeben, ihr findet die Lösungen dazu im OLAT-Kurs.

(1) (a) Berechne $\det(A^5)$ und $\det(5A)$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $a_1, \dots, a_n \in K\backslash\{0\}$ zeige man

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = -\left(\prod_{i=1}^n a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right).$$

(2) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix mit ganzzahligen Einträgen.
Zeige, dass A^{-1} genau dann ebenfalls nur ganzzahlige Einträge hat, wenn $\det A = \pm 1$ gilt.

(3) Es seien $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix, die eine Blockgestalt der Form

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

hat, wobei $B \in K^{m\times m}$ und $C \in K^{(n-m)\times(n-m)}$ selbst quadratische Matrizen sind. Zeige, dass dann $\det A = \det B \cdot \det C$ gilt.

(Hinweis: Es hilft, zunächst die Fälle zu betrachten, in denen eine der Matrizen B und C nicht invertierbar oder die Einheitsmatrix ist.)