Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 12

Abgabe: Montag, 3. Februar bis 16:00 Uhr

(1) Für ein festes $a \in \mathbb{R}$ seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ sowie $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^4$.

Ferner betrachten wir die Familie $C := (\overline{v_1}, \overline{v_2})$ in $V := \mathbb{R}^4 / \operatorname{Lin}(w_1, w_2)$ und die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^4 \to V$, $x \mapsto \overline{x}$.

(a) Für welche a ist C eine Basis von V?

(b) Bestimme für $a = 0$ die Abbildungsmatrix $A_f^{E,C}$, wobei E die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ ist.

(c) Gibt es Basen B' und C' von $\mathbb{R}^4$ bzw. V, so dass $A_f^{B',C'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$?

(2) Es seien U, U_1, U_2 Unterräume eines Vektorraums V. Man zeige:

(a) Ist $(x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von U und sind $y_1, \dots, y_m \in V$ so dass $(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})$ eine Basis von V/U ist, dann ist $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ eine Basis von V.

(b) Sind $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung in einen weiteren Vektorraum W und $Z \le W$, so ist

$$g\colon V/U \to W/Z,\ \overline{x} \mapsto \overline{f(x)}$$

genau dann eine wohldefinierte lineare Abbildung, wenn $f(U) \subset Z$ gilt.

(c) Die Abbildung

$$f\colon U_1/(U_1 \cap U_2) \to (U_1 + U_2)/U_2,\ \overline{x} \mapsto \overline{x}$$

ist wohldefiniert und ein Isomorphismus. (Insbesondere liefert dies also im Fall eines endlich-dimensionalen Vektorraums V einen alternativen Beweis der schon bekannten Dimensionsformel $\dim U_1 - \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1 + U_2) - \dim U_2$ für Durchschnitte und Summen.)