Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 11

Abgabe: Montag, 27. Januar bis 16:00 Uhr

(1) Es seien $U_1,\dots,U_n$ Unterräume eines endlich-dimensionalen Vektorraums V und $U := U_1+\cdots+U_n$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$.

(b) Sind $u_i \in U_i$ für $i = 1,\dots,n$ so dass $u_1+\cdots+u_n = 0$, so gilt bereits $u_1 = \cdots = u_n = 0$.

(c) $U_i \cap (U_1+\cdots+U_{i-1}+U_{i+1}+\cdots+U_n) = \{0\}$ für alle $i = 1,\dots,n$.

(d) $U_i \cap (U_{i+1}+\cdots+U_n) = \{0\}$ für alle $i = 1,\dots,n-1$.

(e) $\dim U = \dim U_1+\cdots+\dim U_n$.

(2) (a) Bestimme jeweils ein Komplement von $U = \operatorname{Lin}(-2x^4+2x^2+1, 3x^2+x, x^4+x^3)$ in $\operatorname{Pol}_4(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und in $\operatorname{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine reelle Matrix mit $m,n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeige, dass $\operatorname{Ker}(A^\mathsf{T})$ ein Komplement von $\operatorname{Im} A$ in $\mathbb{R}^m$ ist.