

## 16. Lineare Abbildungen

In den letzten Kapiteln haben wir ausführlich Vektorräume untersucht – also die grundlegende Struktur, mit der sich die lineare Algebra befasst – und dabei auch gesehen, wie man konkret mit ihnen rechnen kann. Um nun verschiedene Vektorräume miteinander in Verbindung setzen zu können, müssen wir als Nächstes Abbildungen zwischen Vektorräumen untersuchen, die mit den gegebenen Vektorraumstrukturen verträglich sind. Dies wollen wir in diesem Kapitel tun.

In der Tat ist dies eine sehr allgemeine Vorgehensweise der Mathematik: Immer wenn man eine neue mathematische Struktur (wie z. B. Gruppen, Körper, oder jetzt hier die Vektorräume) einführt, wird man als Erstes zwei Dinge untersuchen:

- die sogenannten *Unterstrukturen*, d. h. Teilmengen, die selbst wieder die betrachtete Struktur haben (in der linearen Algebra also die Untervektorräume aus Abschnitt 13.B), und
- die sogenannten *Morphismen*, d. h. Abbildungen, die diese Struktur erhalten.

Wir haben dies in Abschnitt 3.A nur deswegen für Gruppen und Körper nicht getan, weil wir in dieser Vorlesung nur Vektorräume, aber nicht Gruppen und Körper ausführlich studieren wollen. Diejenigen von euch, die auch die Parallelvorlesung „Algebraische Strukturen“ hören, haben dort aber z. B. auch schon Untergruppen und Morphismen von Gruppen kennengelernt – und werden im Vergleich zur linearen Algebra sicher feststellen, dass sich Untervektorräume und Morphismen von Vektorräumen in vielerlei Hinsicht sehr ähnlich verhalten.

### 16.A Morphismen von Vektorräumen

In der linearen Algebra besteht die „Struktur“ eines Vektorraums gemäß Definition 13.1 in der Existenz einer Vektoraddition und einer Skalarmultiplikation mit gewissen Eigenschaften. Die mit dieser Struktur verträglichen Abbildungen sind also genau die im Sinne der folgenden Definition *linearen* Abbildungen.

**Definition 16.1** (Lineare Abbildungen bzw. Morphismen). Es seien  $V$  und  $W$  zwei Vektorräume über demselben Grundkörper  $K$ . Man nennt eine Abbildung  $f: V \rightarrow W$  eine **lineare Abbildung** oder **Morphismus** (oder **(Vektorraum-)Homomorphismus**), wenn für alle  $x, y \in V$  und  $\lambda \in K$  gilt, dass

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (,f \text{ ist verträglich mit der Vektoraddition" )$$

und

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad (,f \text{ ist verträglich mit der Skalarmultiplikation" ).$$

Die Menge aller solchen Morphismen mit Startraum  $V$  und Zielraum  $W$  wird mit  $\text{Hom}_K(V, W)$  bezeichnet (oder auch nur mit  $\text{Hom}(V, W)$ , wenn der Grundkörper aus dem Zusammenhang klar ist).

Ist  $V = K^n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , so schreiben wir statt  $f \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$  der Einfachheit halber oft nur  $f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ .

**Bemerkung 16.2.** Setzt man  $\lambda = 0$  in Definition 16.1 ein, so erhält man sofort, dass  $f(0) = 0$  für jeden Morphismus  $f: V \rightarrow W$  gelten muss. Für ein festes  $b \in V \setminus \{0\}$  ist also z. B. die Verschiebeabbildung  $f: V \rightarrow V$ ,  $x \mapsto x + b$  wegen  $f(0) = b \neq 0$  nie ein Morphismus.

Beachte, dass es hier also (leider) unterschiedliche Notationen in der Analysis und der linearen Algebra gibt: Eine Funktion der Form  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto ax + b$  mit  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  würde man in der Analysis im Sinne von Definition 3.24 als linear bezeichnen, sie ist in der linearen Algebra gemäß Definition 16.1 aber wegen  $f(0) \neq 0$  keine lineare Abbildung!

**Beispiel 16.3.**

- (a) Für beliebige  $K$ -Vektorräume  $V$  und  $W$  ist die Nullabbildung  $f: V \rightarrow W, x \mapsto 0$  natürlich immer ein Morphismus, ebenso für gleichen Start- und Zielraum die identische Abbildung  $\text{id}_V: V \rightarrow V, x \mapsto x$ .
- (b) Für eine Matrix  $A \in K^{m \times n}$  bezeichnen wir mit  $f_A$  die Abbildung

$$f_A: K^n \rightarrow K^m, x \mapsto Ax.$$

Sie ist ein Morphismus, denn für alle  $x, y \in K^n$  und  $\lambda \in K$  gilt

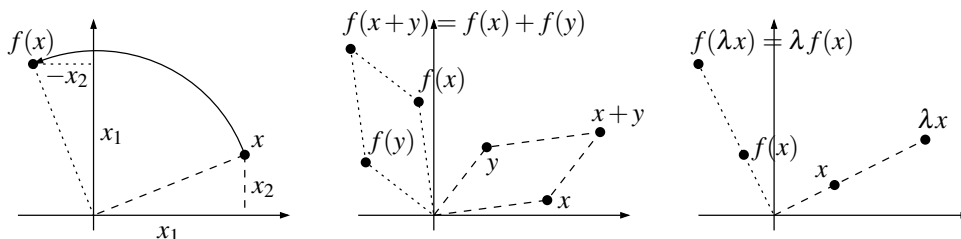
$$f_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = f_A(x) + f_A(y) \quad \text{und} \quad f_A(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda f_A(x).$$

Dies ist sicher das mit Abstand wichtigste Beispiel für eine lineare Abbildung – in der Tat werden wir in Abschnitt 16.C noch sehen, dass sogar *jede* lineare Abbildung von  $K^n$  nach  $K^m$  so geschrieben werden kann.

Konkret erhalten wir z. B. für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad \text{die lineare Abbildung} \quad f_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Geometrisch beschreibt sie wie im Bild unten links eine Vierteldrehung um den Ursprung. An den anderen beiden Bildern kann man die Morphismuseigenschaft auch gut anschaulich ablesen: Im mittleren Bild ist z. B. das gepunktete Parallelogramm aus der Drehung des gestrichelten entstanden, und der äußerste Punkt ergibt sich damit sowohl durch Addition der Punkte  $f(x)$  und  $f(y)$  als auch durch Drehung von  $x+y$ , d. h. es ist  $f(x) + f(y) = f(x+y)$ . Entsprechendes gilt für die Skalarmultiplikation im rechten Bild.



Anschaulich ist damit auch schon erkennbar, dass Drehungen um andere Winkel um den Ursprung ebenfalls Morphismen sein sollten. Wir werden solche allgemeinen Drehungen später in Beispiel ?? und Abschnitt ?? noch untersuchen.

- (c) Die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1^2 + x_2$$

ist nicht linear, denn es ist z. B.

$$f \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 = f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

- (d) Für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  ist die Transposition von Matrizen

$$f: K^{m \times n} \rightarrow K^{n \times m}, A \mapsto A^T$$

eine lineare Abbildung, denn für alle  $A = (a_{i,j})_{i,j}, B = (b_{i,j})_{i,j} \in K^{m \times n}$  und  $\lambda \in K$  gilt

$$f(A+B) = (A+B)^T = (a_{j,i} + b_{j,i})_{i,j} = (a_{j,i})_{i,j} + (b_{j,i})_{i,j} = A^T + B^T = f(A) + f(B)$$

und  $f(\lambda A) = (\lambda a_{j,i})_{i,j} = \lambda (a_{j,i})_{i,j} = \lambda A^T = \lambda f(A).$

- (e) Zum Vektorraum  $\text{Pol}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  aller reellen Polynome aus Beispiel 13.12 (c) betrachten wir die Abbildung  $f: \text{Pol}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Pol}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $\varphi \mapsto \varphi'$ , die jedem Polynom  $\varphi: x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$  seine Ableitung

$$\varphi': x \mapsto \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} \quad (*)$$

zuordnet.

Wenn ihr die Ableitung bereits aus der Analysis kennt, wisst ihr aus Beispiel ?? ?? schon, dass die Ableitung eines Polynoms durch (\*) gegeben ist, und dass  $f$  eine lineare Abbildung ist, da nach Satz ?? ?? und Beispiel ?? ?? für alle differenzierbaren Funktionen  $\varphi$  und  $\psi$  sowie  $\lambda \in \mathbb{R}$  sowohl  $(\varphi + \psi)' = \varphi' + \psi'$  als auch  $(\lambda \varphi)' = \lambda \varphi'$  gilt.

Wenn ihr die Ableitung aus der Analysis noch nicht kennt, könnt ihr (\*) für die Zwecke der linearen Algebra einfach als *Definition* der Ableitung eines Polynoms ansehen. Man rechnet dann schnell nach, dass  $f$  wirklich eine lineare Abbildung ist: Für zwei Polynome  $\varphi(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  und  $\psi(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$  (wobei  $n$  der größere der beiden Grade ist, so dass sowohl  $\varphi$  als auch  $\psi$  so geschrieben werden können) sowie  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)'(x) &= \sum_{k=1}^n k(a_k + b_k)x^{k-1} = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^n k b_k x^{k-1} = \varphi'(x) + \psi'(x) \\ \text{und } (\lambda \varphi)'(x) &= \sum_{k=1}^n k(\lambda a_k)x^{k-1} = \lambda \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = \lambda \varphi'(x). \end{aligned}$$

**Aufgabe 16.4.** Untersuche, ob die folgenden Abbildungen  $f$  zwischen  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen linear sind:

- (a)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax_2^2 + bx_2 \\ cx_1 x_2 \end{pmatrix}$  in Abhängigkeit von fest gegebenen  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .  
 (b)  $f: V \rightarrow V$ ,  $\varphi \mapsto f(\varphi)$  mit  $f(\varphi)(x) = x^2 \varphi(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 16.5.** Wir betrachten die Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{sowie} \quad y_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Man zeige:

- (a) Es gibt einen Morphismus  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $f(x_i) = e_i$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$ .  
 (b) Es gibt einen Morphismus  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $g(x_i) = y_i$  für alle  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

(Die Morphismen müssen nicht explizit angegeben werden.)

Wir wollen nun einige elementare Eigenschaften von Morphismen zeigen und beginnen damit, dass Bilder und Urbilder (im Sinne von Definition 2.11) von Unterräumen unter Morphismen immer wieder Unterräume sind.

**Lemma 16.6** (Bilder und Urbilder von Unterräumen). *Es sei  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

- (a) Für jeden Unterraum  $U$  von  $V$  ist  $f(U)$  ein Unterraum von  $W$ .  
 (b) Für jeden Unterraum  $U$  von  $W$  ist  $f^{-1}(U)$  ein Unterraum von  $V$ .

*Beweis.* Die Aussagen ergeben sich durch einfaches Nachprüfen der Definition 13.8:

- (a) Wegen  $0 \in U$  ist nach Bemerkung 16.2 zunächst auch  $0 = f(0) \in f(U)$ . Wir zeigen nun die Abgeschlossenheit von  $f(U)$  bezüglich der Vektoraddition. Es seien dazu  $x, y \in f(U)$ , d. h.  $x = f(u)$  und  $y = f(v)$  für gewisse  $u, v \in U$ . Dann ist auch  $u + v \in U$ , und damit folgt  $x + y = f(u) + f(v) = f(u + v) \in f(U)$ .

Genauso zeigt man die Abgeschlossenheit unter der Skalarmultiplikation.

- (b) Wegen  $f(0) = 0 \in U$  ist zunächst einmal  $0 \in f^{-1}(U)$ . Wir zeigen jetzt die Abgeschlossenheit von  $f^{-1}(U)$  unter der Vektoraddition. Dazu seien  $x, y \in f^{-1}(U)$ , d. h.  $x, y \in V$  mit  $f(x), f(y) \in U$ . Dann ist auch  $f(x+y) = f(x) + f(y) \in U$ , also  $x+y \in f^{-1}(U)$ .

Analog ergibt sich die Abgeschlossenheit unter der Skalarmultiplikation.  $\square$

Die wichtigsten Spezialfälle dieses Lemmas sind die folgenden, die wir in Definition 15.10 und Lemma 15.11 schon im Zusammenhang mit Matrizen kennengelernt hatten:

**Definition 16.7** (Bild, Rang und Kern eines Morphismus). Es sei  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung von  $K$ -Vektorräumen.

- (a) Die Menge  $\text{Im } f := f(V) = \{f(x) : x \in V\}$  heißt das **Bild** von  $f$ ; nach Lemma 16.6 (a) ist sie ein Unterraum von  $W$ . Die Dimension dieses Unterraums heißt der **Rang** von  $f$ , geschrieben  $\text{rk } f := \dim \text{Im } f \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ .
- (b) Die Menge  $\text{Ker } f := f^{-1}(\{0\}) = \{x \in V : f(x) = 0\}$  heißt der **Kern** von  $f$ ; nach Lemma 16.6 (b) ist sie ein Unterraum von  $V$ .

**Bemerkung 16.8.** Für eine Matrix  $A \in K^{m \times n}$  mit  $m, n \in \mathbb{N}$  hatten wir in Beispiel 16.3 (b) die lineare Abbildung  $f_A: K^n \rightarrow K^m$ ,  $x \mapsto Ax$  konstruiert. Vergleichen wir nun Definition 16.7 mit den Definitionen 15.10 und 15.11, so sehen wir also unmittelbar, dass

$$\text{Im } f_A = \text{Im } A, \quad \text{rk } f_A = \text{rk } A \quad \text{und} \quad \text{Ker } f_A = \text{Ker } A$$

gilt. Insbesondere können wir damit Bild, Rang und Kern solcher linearen Abbildungen mit den Methoden aus Abschnitt 15.C auch explizit berechnen.

Offensichtlich ist eine lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  nach Definition genau dann surjektiv, wenn  $\text{Im } f = W$  gilt. Wir wollen jetzt ein analoges Kriterium auch für die Injektivität zeigen.

**Lemma 16.9.** Eine lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  ist genau dann injektiv, wenn  $\text{Ker } f = \{0\}$  gilt.

*Beweis.*

„ $\Rightarrow$ “: Ist  $f$  injektiv, so hat der Nullvektor höchstens ein Urbild unter  $f$ . Wegen  $f(0) = 0$  ist das Urbild des Nullvektors also genau der Nullvektor, d. h. es ist  $\text{Ker } f = \{0\}$ .

„ $\Leftarrow$ “: Es sei  $\text{Ker } f = \{0\}$ . Weiterhin seien  $x, y \in V$  mit  $f(x) = f(y)$ . Wegen der Linearität von  $f$  gilt dann  $f(x-y) = f(x) - f(y) = 0$ , mit  $\text{Ker } f = \{0\}$  also  $x-y=0$ . Damit folgt  $x=y$ , d. h.  $f$  ist injektiv.  $\square$

**Lemma 16.10** (Umkehrabbildungen und Verkettungen). Es sei  $f: V \rightarrow W$  ein Morphismus von  $K$ -Vektorräumen. Dann gilt:

- (a) Ist  $f$  bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung  $f^{-1}$  ein Morphismus.
- (b) Ist  $g: W \rightarrow Z$  ein weiterer Morphismus von  $K$ -Vektorräumen, so ist auch  $g \circ f: V \rightarrow Z$  ein Morphismus.

*Beweis.*

- (a) Es seien  $x, y \in W$ ; wir setzen  $u = f^{-1}(x)$  und  $v = f^{-1}(y)$ , also  $x = f(u)$  und  $y = f(v)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}(x+y) &= f^{-1}(f(u) + f(v)) \\ &= f^{-1}(f(u+v)) && (f \text{ ist ein Morphismus}) \\ &= u+v && (f^{-1} \text{ ist die Umkehrabbildung von } f) \\ &= f^{-1}(x) + f^{-1}(y). \end{aligned}$$

Analog zeigt man die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation.

(b) Für alle  $x, y \in V$  gilt

$$\begin{aligned} g(f(x+y)) &= g(f(x) + f(y)) && (f \text{ ist ein Morphismus}) \\ &= g(f(x)) + g(f(y)) && (g \text{ ist ein Morphismus}). \end{aligned}$$

Genauso ergibt sich die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation.  $\square$

**Aufgabe 16.11.** Man zeige: Sind  $f, g: V \rightarrow W$  zwei lineare Abbildungen, so gilt

- (a)  $\text{Im}(f + g) \leq \text{Im} f + \text{Im} g$ ;  
 (b)  $\text{Ker} f \cap \text{Ker} g \leq \text{Ker}(f + g)$ .

Weiterhin gebe man in beiden Fällen ein Beispiel an, das zeigt, dass man im Allgemeinen nicht „ $\leq$ “ durch „ $=$ “ ersetzen kann.

**Aufgabe 16.12.** Für ein gegebenes  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  betrachten wir die Abbildung

$$f: \text{Pol}_{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n, \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(1) \\ \vdots \\ \varphi(n) \end{pmatrix}.$$

- (a) Zeige, dass  $f$  linear ist.  
 (b) Bestimme Kern und Bild von  $f$ , und gib dabei von jedem Element von  $\text{Im} f$  explizit ein Urbild an.

**Aufgabe 16.13.** Es sei  $f: V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung zwischen  $K$ -Vektorräumen. Ferner sei  $U$  ein Unterraum von  $V$  mit  $U \cap \text{Ker} f = \{0\}$  und  $U + \text{Ker} f = V$ .

Zeige, dass die Abbildung  $f|_U: U \rightarrow \text{Im} f$  bijektiv ist.

**Aufgabe 16.14.** Beweise für jede lineare Abbildung  $f: V \rightarrow V$  mit gleichem Start- und Zielraum, dass

$$f \circ f = f \iff \text{Ker}(\text{id}_V - f) = \text{Im} f.$$

Wie wir nun zum Abschluss dieses Abschnitts noch sehen wollen, haben bijektive Morphismen wie in Lemma 16.10 (a) in der Praxis eine besondere Bedeutung. Sie haben daher auch einen besonderen Namen:

**Definition 16.15** (Isomorphismen). Es seien  $V$  und  $W$  zwei  $K$ -Vektorräume.

- (a) Einen bijektiven Morphismus  $f: V \rightarrow W$  (der nach Lemma 16.10 (a) also einen Umkehrmorphismus  $f^{-1}: W \rightarrow V$  besitzt) bezeichnet man als **(Vektorraum-)Isomorphismus**.  
 (b)  $V$  und  $W$  heißen **isomorph** (in Zeichen:  $V \cong W$ ), wenn es einen Isomorphismus  $f: V \rightarrow W$  zwischen ihnen gibt.

**Beispiel 16.16.** Anschaulich bedeutet ein Isomorphismus  $f$  zwischen zwei Vektorräumen  $V$  und  $W$ , dass diese beiden Räume „als Vektorräume ununterscheidbar“ sind: Die Objekte in  $V$  und  $W$  sind zwar unterschiedlich benannt, aber in allen Rechnungen können wir jederzeit mit der bijektiven Abbildung  $f$  bzw. der inversen Abbildung  $f^{-1}$  zwischen den beiden Darstellungen in  $V$  und  $W$  hin- und herwechseln, ohne das Endergebnis zu ändern. Die folgenden beiden Beispiele verdeutlichen dies; viele weitere werden wir im nächsten Abschnitt noch kennenlernen.

(a) Der Unterraum

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\} \leq \mathbb{R}^3 \quad \text{ist mit} \quad f: V \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

isomorph zu  $\mathbb{R}^2$ . In der Tat ist in diesem Beispiel offensichtlich, dass  $f$  linear und bijektiv ist. Auch anschaulich ist in diesem Fall klar, dass  $V$  und  $\mathbb{R}^2$  „im Prinzip ununterscheidbar“ sind, denn beide Räume sind einfach die reelle Ebene – die im Fall von  $V$  lediglich als Koordinatenebene in den  $\mathbb{R}^3$  eingebettet ist.

- (b) Für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  ist der Raum  $K^{m \times n}$  aller  $m \times n$ -Matrizen über  $K$  isomorph zu  $K^{mn}$ : Ein Isomorphismus  $f: K^{m \times n} \rightarrow K^{mn}$  ist einfach dadurch gegeben, dass man die Einträge einer Matrix von links oben nach rechts unten nun untereinander in einen Vektor in  $K^{mn}$  schreibt. Auch hier ist klar, dass  $f$  linear und bijektiv ist, also dass die Anordnung der Zahlen – einmal als rechteckiges Schema und einmal untereinander geschrieben – nichts an der Vektorraumstruktur ändert, da Addition und Skalarmultiplikation in beiden Fällen einfach komponentenweise ausgeführt werden. (Dass es in  $K^{m \times n}$  eine Matrixmultiplikation gibt, in  $K^{mn}$  jedoch nicht, spielt hierbei keine Rolle, da dies nicht Teil der Vektorraumaxiome ist.)

35

Wie erwartet haben isomorphe Vektorräume als „ununterscheidbare Vektorräume“ auch immer die gleiche Dimension. Dies wollen wir zum Abschluss dieses Abschnitts noch formal beweisen.

**Lemma 16.17.** *Es sei  $f: V \rightarrow W$  ein Morphismus zwischen endlich-dimensionalen  $K$ -Vektorräumen.*

- (a) *Ist  $f$  surjektiv, so bildet  $f$  jedes Erzeugendensystem von  $V$  auf ein Erzeugendensystem von  $W$  ab. Insbesondere gilt dann also  $\dim V \geq \dim W$ .*
- (b) *Ist  $f$  injektiv, so bildet  $f$  jede linear unabhängige Familie in  $V$  auf eine linear unabhängige Familie in  $W$  ab. Insbesondere gilt dann also  $\dim V \leq \dim W$ .*
- (c) *Ist  $f$  ein Isomorphismus, so bildet  $f$  jede Basis von  $V$  auf eine Basis von  $W$  ab. Insbesondere gilt dann also  $\dim V = \dim W$ .*

*Beweis.* Es sei  $B = (x_1, \dots, x_n)$  eine Familie von Vektoren in  $V$ . Wir betrachten die abgebildete Familie  $f(B) := (f(x_1), \dots, f(x_n))$  von Vektoren in  $W$ .

- (a) Es seien  $B$  ein Erzeugendensystem von  $V$  und  $y \in W$  beliebig. Da  $f$  surjektiv ist, gibt es zunächst ein  $x \in V$  mit  $f(x) = y$ . Weil  $B$  ein Erzeugendensystem von  $V$  ist, können wir dann  $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$  für gewisse  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  schreiben. Damit ist aber auch

$$y = f(x) = f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) \in \text{Lin } f(B).$$

Also ist  $f(B)$  ein Erzeugendensystem von  $W$ .

Wenden wir dies auf eine Basis  $B$  von  $V$  an, so erhalten wir aus Folgerung 14.21 (a) sofort  $\dim V = n \geq \dim W$ .

- (b) Es seien  $B$  linear unabhängig und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  mit  $\lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n) = 0$ , also (weil  $f$  linear ist) mit

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = 0.$$

Nach Voraussetzung ist  $f$  injektiv, d. h. es ist  $\text{Ker } f = \{0\}$  aufgrund von Lemma 16.9. Also folgt bereits  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ , und damit auch  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ , da  $B$  linear unabhängig ist. Die Familie  $f(B)$  ist somit linear unabhängig.

Wenden wir dies wieder auf eine Basis  $B$  von  $V$  an, so erhalten wir aus Folgerung 14.21 (b) diesmal  $\dim V = n \leq \dim W$ .

- (c) Dies ist einfach (a) kombiniert mit (b). □

## 16.B Die Klassifikation endlich-dimensionaler Vektorräume

Immer wenn man eine mathematische Struktur eingeführt und dazu ein paar Beispiele untersucht hat, fragt man sich in der Regel, ob man vielleicht sogar eine *vollständige* Liste aller Beispiele angeben kann – in der linearen Algebra also, ob wir eine vollständige Liste aller (endlich-dimensionalen) Vektorräume hinschreiben können. Dabei soll „vollständig“ immer „vollständig bis auf Isomorphie“ bedeuten, da wir ja gerade in Beispiel 16.16 gesehen haben, dass isomorphe Vektorräume von ihrer Struktur her ohnehin ununterscheidbar sind, so dass es uns natürlich reichen sollte, wenn dann einer von ihnen in unserer Liste steht.

Bei vielen mathematischen Strukturen ist eine derartige Klassifikation schlichtweg aussichtslos, weil es viel zu viele Beispiele gibt, die auch keinem ersichtlichen Schema folgen. Dies ist z. B. bei Gruppen (siehe Definition 3.1) der Fall – niemand kann eine vollständige Liste aller Gruppen (bis auf Isomorphie) angeben. Falls ihr die Parallelvorlesung „Algebraische Strukturen“ hört, in der Gruppen ausführlich untersucht werden, werdet ihr dort also nahezu keine Resultate in diese Richtung finden.

Es ist eine Besonderheit der linearen Algebra, dass dies bei endlich-dimensionalen Vektorräumen anders ist: Wie wir jetzt sehen wollen, sind diese Vektorräume genau durch ihre Dimension klassifiziert, d. h. zu jedem Körper  $K$  und jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  gibt es bis auf Isomorphie *genau einen*  $K$ -Vektorraum dieser Dimension, nämlich  $K^n$ . Dies wird unsere weitere Arbeit ganz wesentlich vereinfachen: Wenn wir dann Aussagen über beliebige endlich-dimensionale Vektorräume beweisen wollen, genügt es deswegen nämlich, nur die Vektorräume  $K^n$  zu betrachten – und mit denen lässt es sich natürlich deutlich leichter arbeiten als mit abstrakten Vektorräumen.

In der Tat haben wir alle Ideen zum Beweis dieser Klassifikation schon gesehen: Zu einem  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $V$  können wir nach Satz 14.11 eine Basis  $B$  wählen, und dann jeden Vektor in  $V$  nach Lemma 14.8 eindeutig durch seine Koordinaten bezüglich  $B$  beschreiben, die einen Vektor in  $K^n$  bilden. Diese Zuordnung liefert wie folgt den gewünschten Isomorphismus zwischen  $V$  und  $K^n$ .

**Konstruktion 16.18** (Koordinatenabbildungen). Es sei  $V$  ein endlich erzeugter Vektorraum der Dimension  $n = \dim V$  mit gegebener Basis  $B = (x_1, \dots, x_n)$ . Da jeder Vektor  $x \in V$  nach Lemma 14.8 eine eindeutige Darstellung  $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$  mit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  besitzt, gibt es dann eine bijektive Abbildung

$$\Phi_B: V \rightarrow K^n, \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Man nennt  $\Phi_B$  die **Koordinatenabbildung** zur Basis  $B$ , und  $\Phi_B(x) \in K^n$  für ein  $x \in V$  den **Koordinatenvektor** von  $x$  bezüglich  $B$ . Offensichtlich ist  $\Phi_B$  linear, und damit ein Isomorphismus zwischen  $V$  und  $K^n$ .

**Beispiel 16.19.**

- (a) Für die Standardbasis  $B = (e_1, \dots, e_n)$  von  $K^n$  mit  $n \in \mathbb{N}$  ist die Koordinatenabbildung  $\Phi_B: K^n \rightarrow K^n$  natürlich einfach die identische Abbildung.
- (b) Es seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $B = (1, x, \dots, x^n)$  die Basis von  $\text{Pol}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  aus Beispiel 14.5 (d). Die zugehörige Koordinatenabbildung

$$\Phi_B: \text{Pol}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \mapsto \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

ordnet dann einem Polynom genau seine Koeffizienten zu (in der Reihenfolge, die wir für die Basis  $B$  gewählt haben). Also ist  $\text{Pol}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n+1}$ . Im Sinne von Beispiel 16.16 ist dieser Isomorphismus auch hier anschaulich klar, da der Vektor der Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n$  dieselben Informationen enthält wie das daraus gebildete Polynom  $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ .

**Folgerung 16.20** (Klassifikation endlich-dimensionaler Vektorräume). *Jeder endlich-dimensionale  $K$ -Vektorraum  $V$  ist (über die Koordinatenabbildung zu einer beliebigen Basis) isomorph zu  $K^n$  für ein eindeutig bestimmtes  $n \in \mathbb{N}$ , nämlich für  $n = \dim V$ .*

*Beweis.* Die Existenz eines Isomorphismus haben wir in Konstruktion 16.18 gesehen, die Eindeutigkeit von  $n$  in Lemma 16.17 (c).  $\square$

Mit diesem wichtigen Ergebnis können wir nun wie angekündigt viele Aussagen und Rechenmethoden von  $K^n$  auf beliebige endlich-dimensionale Vektorräume übertragen. Als Erstes betrachten wir dazu den offensichtlichen Isomorphismus  $K^n \times K^m \cong K^{n+m}$  für alle  $m, n \in \mathbb{N}$ , der sich ergibt,

da die Elemente beider Seiten einfach durch  $n + m$  skalare Komponenten gegeben sind. Für endlich erzeugte Vektorräume ergibt sich daraus die folgende Dimensionsaussage.

**Folgerung 16.21** (Dimensionsformel für Produkte). *Sind  $V$  und  $W$  zwei endlich-dimensionale Vektorräume, so gilt*

$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W.$$

*Eine analoge Aussage gilt natürlich auch für Produkte von mehr als zwei Vektorräumen.*

*Beweis.* Nach Folgerung 16.20 gibt es Isomorphismen  $f: V \rightarrow K^n$  und  $g: W \rightarrow K^m$  mit  $n = \dim V$  und  $m = \dim W$ . Dann ist aber auch

$$V \times W \rightarrow K^n \times K^m \cong K^{n+m}, (x, x') \mapsto (f(x), g(x'))$$

ein Isomorphismus (mit Umkehrabbildung  $(y, y') \mapsto (f^{-1}(y), g^{-1}(y'))$ ), und damit ergibt sich aus Folgerung 16.20

$$\dim(V \times W) = n + m = \dim V + \dim W. \quad \square$$

Auch die Algorithmen zur Bestimmung von Erzeugendensystemen und linearer Unabhängigkeit, zur Basisauswahl und -ergänzung, oder zur Berechnung von Durchschnitten und Summen von Unterräumen können wir über Koordinatenabbildungen von  $K^n$  auf beliebige endlich-dimensionale Vektorräume übertragen. Am besten sieht man dies vermutlich an einem Beispiel:

**Beispiel 16.22.** Im Vektorraum  $\text{Pol}_3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  aller reellen Polynome vom Grad höchstens 3 seien

$$U_1 = \text{Lin}(1 + 2x^3, x + x^2 + x^3) \quad \text{und} \quad U_2 = \text{Lin}(1 + x + 2x^3, x^2 + x^3).$$

Um mit diesen Unterräumen konkrete Berechnungen durchzuführen, können wir gemäß Beispiel 14.5 (d) die Basis  $B = (1, x, x^2, x^3)$  von  $\text{Pol}_3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  wählen und die Koordinatenvektoren bezüglich  $B$  benutzen. Konkret sind diese Koordinatenvektoren der oben gegebenen Polynome die Vektoren

$$\Phi_B(1 + 2x^3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \Phi_B(x + x^2 + x^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \Phi_B(1 + x + 2x^3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \Phi_B(x^2 + x^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

in  $\mathbb{R}^4$ . Damit können wir z. B. berechnen:

- Da die ersten beiden Vektoren in (\*) linear unabhängig in  $\mathbb{R}^4$  sind, sind die Polynome  $1 + 2x^3$  und  $x + x^2 + x^3$  nach Lemma 16.17 (b) linear unabhängig in  $U_1$ , und damit eine Basis von  $U_1$ . Es ist also  $\dim U_1 = 2$ . Analog sieht man auch  $\dim U_2 = 2$ .
- Die ersten beiden Vektoren in (\*) bilden eine  $4 \times 2$ -Matrix in Spaltenstufenform mit 2 Stufen und den Stufenzeilen 1 und 2. Nach Algorithmus 15.41 (d) können sie also mit den Einheitsvektoren  $e_3$  und  $e_4$  zu einer Basis von  $\mathbb{R}^4$  ergänzt werden. Anwenden des Isomorphismus  $\Phi_B^{-1}$  liefert daher mit Lemma 16.17 (c), dass  $\Phi_B^{-1}(e_3) = x^2$  und  $\Phi_B^{-1}(e_4) = x^3$  die Polynome  $1 + 2x^3$  und  $x + x^2 + x^3$  zu einer Basis von  $\text{Pol}_3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  ergänzen.
- Um eine Basis des Durchschnitts  $U_1 \cap U_2$  zu bestimmen, berechnen wir zunächst das Bild dieses Durchschnitts unter  $\Phi_B$ . Diese Rechnung haben wir schon in Algorithmus 14.27 (a) durchgeführt: Es ist

$$\Phi_B(U_1) \cap \Phi_B(U_2) = \text{Lin} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \cap \text{Lin} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Lin} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^4.$$

Anwenden von  $\Phi_B^{-1}$  liefert also  $U_1 \cap U_2 = \text{Lin}(1 + x + x^2 + 3x^3)$ ; insbesondere hat  $U_1 \cap U_2$  damit die Dimension 1.



## 16.C Abbildungsmatrizen

Im letzten Abschnitt haben wir endlich-dimensionale Vektorräume klassifiziert: Jeder solche Vektorraum  $V$  ist (über die Koordinatenabbildung zu einer beliebigen Basis) isomorph zu  $K^n$  mit  $n = \dim V$ . Mit diesem sehr nützlichen Ergebnis der linearen Algebra kann man sowohl Beweise (wie in Folgerung 16.21) als auch Rechnungen (wie in Beispiel 16.22) in  $V$  auf solche in  $K^n$  zurückzuführen, wo sie z. B. mit Hilfe von Matrizen und dem Gauß-Algorithmus oft einfacher durchführbar sind.

Ein ähnliches Klassifikationsproblem wollen wir nun auch für Morphismen untersuchen: Ist  $W$  ein weiterer endlich-dimensionaler Vektorraum der Dimension  $m$ , können wir dann alle linearen Abbildungen von  $V$  nach  $W$  klassifizieren, also die Menge  $\text{Hom}(V, W)$  beschreiben? Wenn ihr auch die „Algebraischen Strukturen“ hört, habt ihr dort vielleicht schon das eine oder andere Mal das analoge Problem für Gruppen gesehen – also alle Morphismen zwischen zwei gegebenen Gruppen zu bestimmen – und gesehen, dass dies in der Regel gar nicht so einfach ist und sehr von den konkret betrachteten Gruppen abhängt. Aber auch hier wollen wir jetzt sehen, dass sich die lineare Algebra wieder viel schöner verhält und eine ganz explizite Beschreibung von  $\text{Hom}(V, W)$  ermöglicht.

Im Sinne unserer Klassifikationsidee sollten wir dazu natürlich  $V$  und  $W$  durch die dazu isomorphen Vektorräume  $K^n$  und  $K^m$  ersetzen können. Wir betrachten daher jetzt zunächst einmal die Menge  $\text{Hom}(K^n, K^m)$  aller linearen Abbildungen von  $K^n$  nach  $K^m$  und untersuchen anschließend, wie der allgemeine Fall darauf zurückgeführt werden kann.

Im Fall des Start- und Zielraums  $K^n$  bzw.  $K^m$  haben wir in Beispiel 16.3 (b) schon viele Morphismen gesehen, nämlich zu jeder Matrix  $A \in K^{m \times n}$  die lineare Abbildung

$$f_A: K^n \rightarrow K^m, x \mapsto Ax.$$

Wir werden nun zeigen, dass in der Tat jede lineare Abbildung von  $K^n$  nach  $K^m$  von dieser Form ist – und zwar sogar mit einer eindeutig bestimmten Matrix  $A$ . In diesem Sinne sind lineare Abbildungen in  $\text{Hom}(K^n, K^m)$  und Matrizen in  $K^{m \times n}$  also „im Prinzip dasselbe“. Wie ihr vielleicht schon vermutet, wird dies dann exakt formuliert in der Sprechweise der linearen Algebra wieder heißen, dass  $\text{Hom}(K^n, K^m)$  und  $K^{m \times n}$  isomorphe Vektorräume sind.

**Satz und Definition 16.23** (Lineare Abbildungen  $K^n \rightarrow K^m$  und Abbildungsmatrizen). *Zu jeder linearen Abbildung  $f: K^n \rightarrow K^m$  mit  $m, n \in \mathbb{N}$  gibt es genau eine Matrix  $A \in K^{m \times n}$  mit  $f = f_A$  wie in Beispiel 16.3 (b), also mit*

$$f(x) = Ax \quad \text{für alle } x \in K^n,$$

nämlich  $A = (f(e_1) | \cdots | f(e_n))$ . Wir nennen sie die **Abbildungsmatrix** von  $f$  und bezeichnen sie mit  $A_f$ .

*Beweis.* Die geforderte Bedingung legt nach Beispiel 15.6 (c) für alle  $j = 1, \dots, n$  die  $j$ -te Spalte von  $A$  fest zu  $Ae_j = f(e_j)$ . Damit ist  $A$  eindeutig bestimmt als  $(f(e_1) | \cdots | f(e_n))$ . Da  $f$  linear ist, folgt aus dieser Beziehung für die Einheitsvektoren aber auch für alle  $x \in K^n$  mit Koordinaten  $x_1, \dots, x_n$

$$f(x) = f(x_1e_1 + \cdots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n) = x_1 Ae_1 + \cdots + x_n Ae_n = Ax. \quad \square$$

**Folgerung 16.24.** *Für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt:*

- (a)  $\text{Hom}(K^n, K^m)$  ist ein Unterraum von  $\text{Abb}(K^n, K^m)$ , und die Abbildung

$$K^{m \times n} \rightarrow \text{Hom}(K^n, K^m), A \mapsto f_A$$

ist ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung  $\text{Hom}(K^n, K^m) \rightarrow K^{m \times n}, f \mapsto A_f$ .

Insbesondere ist also  $\dim \text{Hom}(K^n, K^m) = m \cdot n$ .

- (b) Unter dem Isomorphismus aus (a) entspricht die Matrixmultiplikation der Verkettung von Morphismen, d. h. für alle linearen Abbildungen  $f: K^n \rightarrow K^m$  und  $g: K^m \rightarrow K^p$  gilt

$$A_{g \circ f} = A_g \cdot A_f.$$

*Beweis.*

- (a) Die Abbildung  $K^{m \times n} \rightarrow \text{Abb}(K^n, K^m)$ ,  $A \mapsto f_A$  ist linear, denn für alle  $A, B \in K^{m \times n}$  sowie  $x \in K^n$  und  $\lambda \in K$  gilt

$$f_{A+B}(x) = (A+B)x = Ax + Bx = f_A(x) + f_B(x) \quad \text{und} \quad f_{\lambda A}(x) = (\lambda A)x = \lambda(Ax) = \lambda f_A(x),$$

und damit  $f_{A+B} = f_A + f_B$  und  $f_{\lambda A} = \lambda f_A$ . Nach Satz 16.23 ist diese Abbildung injektiv mit Bild  $\text{Hom}(K^n, K^m)$ . Also ist  $\text{Hom}(K^n, K^m)$  nach Lemma 16.6 (a) ein Unterraum von  $\text{Abb}(K^n, K^m)$ , und die eingeschränkte Abbildung  $K^{m \times n} \rightarrow \text{Hom}(K^n, K^m)$ ,  $A \mapsto f_A$  ist ein Isomorphismus. Nach Definition der Abbildungsmatrix ist ihre Umkehrabbildung genau  $\text{Hom}(K^n, K^m) \rightarrow K^{m \times n}$ ,  $f \mapsto A_f$ .

- (b) Für alle  $x \in K^n$  gilt

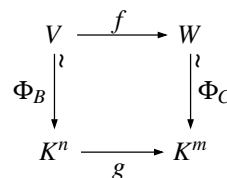
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(A_f \cdot x) = A_g \cdot A_f \cdot x,$$

d. h.  $A_g \cdot A_f$  ist die Abbildungsmatrix von  $g \circ f$ . □

36

**Konstruktion 16.25** (Lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen). Wie angekündigt wollen wir die Ergebnisse von Satz 16.23 und Folgerung 16.24 jetzt auf Morphismen zwischen beliebigen endlich-dimensionalen Vektorräumen  $V$  und  $W$  übertragen.

Die Idee dazu ist im Diagramm rechts dargestellt: Wir wählen Basen  $B$  und  $C$  von  $V$  bzw.  $W$ , die zu den vertikal eingezeichneten Koordinatenabbildungen  $\Phi_B: V \rightarrow K^n$  und  $\Phi_C: W \rightarrow K^m$  mit  $n = \dim V$  und  $m = \dim W$  führen. Die Schlangen am Beginn dieser Pfeile deuten an, dass es sich dabei um Isomorphismen handelt. Mit  $\Phi_B$  und  $\Phi_C$  wollen wir nun Abbildungen  $f: V \rightarrow W$  mit Abbildungen  $g: K^n \rightarrow K^m$  in Beziehung setzen.



Ist z. B.  $f: V \rightarrow W$  gegeben, so können wir daraus eine Abbildung  $g: K^n \rightarrow K^m$  konstruieren, indem wir im Diagramm „den Umweg über  $f$  nehmen“, also durch

$$g = \Phi_C \circ f \circ \Phi_B^{-1} \quad \text{bzw.} \quad f = \Phi_C^{-1} \circ g \circ \Phi_B.$$

Genauso können wir mit diesen Gleichungen natürlich auch umgekehrt  $f$  aus  $g$  konstruieren. Nach Lemma 16.10 (b) ist  $f$  dabei genau dann ein Morphismus, wenn  $g$  einer ist. Da ein Morphismus  $g: K^n \rightarrow K^m$  nun nach Satz 16.23 immer die Form  $x \mapsto Ax$  mit  $A \in K^{m \times n}$  hat, erhalten wir daraus den Morphismus

$$f: V \rightarrow W, \quad x \mapsto \Phi_C^{-1}(A \cdot \Phi_B(x)), \quad \text{bzw. mit} \quad \Phi_C(f(x)) = A \cdot \Phi_B(x) \quad \text{für alle } x \in V.$$

Wir bezeichnen diesen Morphismus mit  $f_A^{B,C}: V \rightarrow W$ . Beachte, dass er sich von der bisherigen Formel aus Satz 16.23 nur um die Koordinatenabbildungen unterscheidet: Während wir die Matrix  $A$  bisher direkt mit dem Startvektor multipliziert haben, um den Zielvektor zu erhalten, müssen wir sie jetzt mit dem *Koordinatenvektor* des Startvektors multiplizieren, um den *Koordinatenvektor* des Zielvektors zu erhalten. Im Fall  $V = K^n$  und  $W = K^m$ , und wenn  $B$  und  $C$  die Standardbasen sind, sind die Koordinatenabbildungen natürlich die Identität, und wir erhalten genau die bisherige Formel zurück.

Die obigen Formeln erscheinen auf den ersten Blick vielleicht etwas unübersichtlich. In der Praxis ergibt sich ihre Anwendung aber oft ganz von selbst, da wir eine Matrix ja gar nicht mit einem Vektor in einem allgemeinen Vektorraum  $V$  multiplizieren können und beim Matrixprodukt auch kein Vektor eines allgemeinen Vektorraums  $W$  herauskommt – so dass klar ist, dass wir hier mit den jeweiligen Koordinatenvektoren arbeiten müssen.

Mit dieser Konstruktion können wir nun wie gewünscht Satz 16.23 und Folgerung 16.24 auf beliebige endlich-dimensionale Vektorräume übertragen:

**Satz und Definition 16.26** (Lineare Abbildungen  $V \rightarrow W$  und Abbildungsmatrizen). *Es seien  $V$  und  $W$  zwei endlich-dimensionale Vektorräume mit  $n := \dim V$  und  $m := \dim W$ . Ferner wählen wir Basen  $B = (x_1, \dots, x_n)$  und  $C = (y_1, \dots, y_m)$  von  $V$  bzw.  $W$ .*

Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung  $f: V \rightarrow W$  genau eine Matrix  $A \in K^{m \times n}$  mit  $f = f_A^{B,C}$  wie in Konstruktion 16.25, also mit

$$\Phi_C(f(x)) = A \cdot \Phi_B(x) \quad \text{für alle } x \in V,$$

nämlich  $A = (\Phi_C(f(x_1)) | \cdots | \Phi_C(f(x_n)))$ . Wir nennen sie die **Abbildungsmatrix** von  $f$  bezüglich  $B$  und  $C$  und bezeichnen sie mit  $A_f^{B,C}$ .

*Beweis.* Wir verwenden die Bezeichnungen aus Konstruktion 16.25. Zu  $f$  gibt es dann zunächst genau eine lineare Abbildung  $g: K^n \rightarrow K^m$  mit  $f = \Phi_C^{-1} \circ g \circ \Phi_B$ , und dazu dann genau eine Abbildungsmatrix  $A$  wie in Satz 16.23, also mit

$$f(x) = \Phi_C^{-1}(A \cdot \Phi_B(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_C(f(x)) = A \cdot \Phi_B(x) \quad \text{für alle } x \in V.$$

Wegen  $\Phi_B(x_j) = e_j$  für  $j = 1, \dots, n$  ist dabei die  $j$ -te Spalte von  $A$  wie behauptet gegeben durch

$$Ae_j = A \cdot \Phi_B(x_j) = \Phi_C(f(x_j)). \quad \square$$

**Folgerung 16.27.** Es seien wieder  $V$  und  $W$  zwei endlich-dimensionale Vektorräume mit  $n := \dim V$  und  $m := \dim W$  sowie Basen  $B = (x_1, \dots, x_n)$  bzw.  $C = (y_1, \dots, y_m)$ . Dann gilt:

- (a)  $\text{Hom}(V, W)$  ist ein Unterraum von  $\text{Abb}(V, W)$ , und die Abbildung

$$K^{m \times n} \rightarrow \text{Hom}(V, W), \quad A \mapsto f_A^{B,C}$$

ist ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung  $\text{Hom}(V, W) \rightarrow K^{m \times n}$ ,  $f \mapsto A_f^{B,C}$ .

Insbesondere ist also  $\dim \text{Hom}(V, W) = \dim V \cdot \dim W$ .

- (b) Unter dem Isomorphismus aus (a) entspricht die Matrixmultiplikation der Verkettung von Morphismen, d. h. ist  $f: V \rightarrow W$  linear, so gilt für alle linearen Abbildungen  $g: W \rightarrow Z$  in einen weiteren Vektorraum  $Z$  mit gegebener Basis  $D$

$$A_{g \circ f}^{B,D} = A_g^{C,D} \cdot A_f^{B,C}.$$

*Beweis.*

- (a) Wie im Beweis von Folgerung 16.24 (a) rechnet man auch hier wieder leicht nach, dass die Abbildung  $K^{m \times n} \rightarrow \text{Abb}(V, W)$ ,  $A \mapsto f_A^{B,C}$  linear ist. Da sie nach Satz 16.26 injektiv mit Bild  $\text{Hom}(V, W)$  ist, folgt die Behauptung.
- (b) Nach Definition 16.26 der Abbildungsmatrizen von  $f$  und  $g$  gilt

$$\Phi_C(f(x)) = A_f^{B,C} \cdot \Phi_B(x) \quad \text{für alle } x \in V$$

$$\text{sowie} \quad \Phi_D(g(y)) = A_g^{C,D} \cdot \Phi_C(y) \quad \text{für alle } y \in W.$$

Setzen wir dies mit  $y = f(x)$  ineinander ein, so erhalten wir für alle  $x \in V$

$$\Phi_D(g(f(x))) = A_g^{C,D} \cdot A_f^{B,C} \cdot \Phi_B(x).$$

Dies bedeutet genau, dass  $A_g^{C,D} \cdot A_f^{B,C}$  die Abbildungsmatrix von  $g \circ f$  bezüglich der Startbasis  $B$  und der Zielbasis  $D$  ist.  $\square$

**Beispiel 16.28.** Es seien  $V = \text{Pol}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit der Basis  $B = (1, x, x^2)$  und  $W = \text{Pol}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit der Basis  $C = (1, x)$  (siehe Beispiel 14.5 (d)). Wir betrachten wie in Beispiel 16.3 (e) die lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$ ,  $\varphi \mapsto \varphi'$ , die einem Polynom seine Ableitung zuordnet.

- (a) Um die Abbildungsmatrix  $A_f^{B,C}$  zu bestimmen, müssen wir nach Definition 16.26 die Basisvektoren von  $B$  abbilden und das Ergebnis als Linearkombinationen der Basisvektoren von  $C$  schreiben: Es ist

$$f(1) = 1' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x,$$

$$f(x) = x' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x,$$

$$f(x^2) = (x^2)' = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x.$$

Die Koeffizienten dieser Linearkombinationen bilden wie üblich die zugehörigen Koordinatenvektoren; wir schreiben sie in die Spalten der gesuchten Abbildungsmatrix und erhalten so

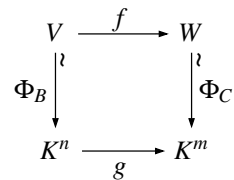
$$\Phi_C(f(1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_C(f(x)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \Phi_C(f(x^2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A_f^{B,C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (b) Auch die umgekehrte Richtung, aus der Abbildungsmatrix die Abbildung zu rekonstruieren, ist nicht weiter schwierig, wenn man sich daran erinnert, dass die Matrix immer nur Koordinatenvektoren sieht. Angenommen, wir wollen  $f(\varphi)$  für  $\varphi = 2x^2 + 3x + 4$ , also letztlich die Ableitung  $\varphi'$ , nur aus der Kenntnis der Abbildungsmatrix  $A_f^{B,C}$  bestimmen. Dann brauchen wir zunächst den Koordinatenvektor  $\Phi_B(\varphi)$  und können diesen dann an die Abbildungsmatrix multiplizieren: Wegen  $\varphi = 4 \cdot 1 + 3 \cdot x + 2 \cdot x^2$  ist

$$\Phi_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ und damit } A_f^{B,C} \cdot \Phi_B(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 16.26 ist dies nun der Koordinatenvektor  $\Phi_C(f(\varphi))$  des Bildes  $f(\varphi)$ . Damit ist  $f(\varphi) = 3 \cdot 1 + 4 \cdot x = 4x + 3$  (was in der Tat die Ableitung von  $\varphi$  ist).

**Bemerkung 16.29** (Bild, Rang und Kern von Abbildungsmatrizen). In Verallgemeinerung von Bemerkung 16.8 lassen sich Bild, Rang und Kern einer linearen Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen wie erwartet auf die zugehörigen Abbildungsmatrizen zurückführen und so mit den Methoden aus Abschnitt 15.C auch leicht berechnen. Dazu betrachten wir noch einmal das Diagramm rechts aus Konstruktion 16.25, in dem die Abbildung  $g$  gegeben ist durch  $x \mapsto A_f^{B,C} \cdot x$ . Damit ist



$$\text{Im } f = f(V) = \Phi_C^{-1}(g(\Phi_B(V))) = \Phi_C^{-1}(g(K^n)) = \Phi_C^{-1}(\text{Im } g) = \Phi_C^{-1}(\text{Im } A_f^{B,C})$$

$$\text{und } \text{Ker } f = f^{-1}(\{0\}) = \Phi_B^{-1}(g^{-1}(\Phi_C(\{0\}))) = \Phi_B^{-1}(g^{-1}(\{0\})) = \Phi_B^{-1}(\text{Ker } g) = \Phi_B^{-1}(\text{Ker } A_f^{B,C}).$$

Da Isomorphismen nach Lemma 16.17 (c) die Dimension erhalten, folgt damit auch  $\text{rk } f = \text{rk } A_f^{B,C}$ .

Für die konkrete Abbildung  $f$  und die Basen  $B$  und  $C$  aus Beispiel 16.28 ist z. B. mit der dort berechneten Abbildungsmatrix

$$\text{Im } A_f^{B,C} = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \text{Im } f = \Phi_C^{-1}(\mathbb{R}^2) = \text{Pol}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

insbesondere ist also  $\text{rk } f = 2$  und  $f$  ist surjektiv. Für den Kern der betrachteten Ableitungsabbildung gilt

$$\text{Ker } A_f^{B,C} = \text{Lin}(e_1) \Rightarrow \text{Ker } f = \Phi_B^{-1}(\text{Lin}(e_1)) = \text{Lin}(1),$$

hier erhalten wir also erwartungsgemäß den Unterraum aller konstanten Polynome.

Mit diesen Ergebnissen können wir nun alle unsere Ergebnisse zu Matrizen auf Morphismen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen übertragen. Hier sind ein paar sehr wichtige Beispiele dafür:

**Folgerung 16.30.** Für jede lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen  $V$  und  $W$  gilt:

- (a)  $\text{rk } f \leq \dim V$  und  $\text{rk } f \leq \dim W$ .
- (b) Für jede weitere lineare Abbildung  $g: W \rightarrow Z$  in einen endlich-dimensionalen Vektorraum  $Z$  gilt  $\text{rk}(g \circ f) \leq \text{rk } f$  und  $\text{rk}(g \circ f) \leq \text{rk } g$ .
- (c) (**Dimensionsformel für Morphismen**)  $\dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \dim V$ .
- (d) Ist  $V = W$ , so ist  $f$  genau dann surjektiv, wenn  $f$  injektiv ist.

*Beweis.* Wir wählen beliebige Basen der Vektorräume  $V$ ,  $W$  und  $Z$  und betrachten die Abbildungsmatrizen  $A \in K^{m \times n}$  und  $B \in K^{n \times p}$  bezüglich dieser Basen (mit  $n = \dim V$ ,  $m = \dim W$  und  $p = \dim Z$ ). Nach Bemerkung 16.29 ergeben sich die Teile (a), (b) und (c) der Folgerung dann unmittelbar aus den entsprechenden Resultaten für die Matrizen  $A$  und  $B$  aus Bemerkung 15.12 (b), Lemma 15.14 bzw. Satz 15.33 (a). So gilt z. B. für Teil (c)

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f \stackrel{16.29}{=} \dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Ker} A \stackrel{15.33(a)}{=} n = \dim V.$$

Teil (d) folgt nun unmittelbar aus dieser Dimensionsformel (c), denn die Surjektivität von  $f$  ist äquivalent zu  $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$  (also  $\dim \operatorname{Im} f = \dim V$ ), und die Injektivität von  $f$  nach Lemma 16.9 zu  $\dim \operatorname{Ker} f = 0$ .  $\square$

**Bemerkung 16.31.** Folgerung 16.30 (d) sieht zwar vielleicht so aus, als ob die Dimension von  $V$  hierbei keine Rolle spielt, ist aber für einen unendlich-dimensionalen Raum  $V$  falsch: Betrachten wir z. B. mit dem Vektorraum  $V = \operatorname{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  aller reellen Zahlenfolgen die „Verschiebomorphismen“

$$\begin{aligned} f: V &\rightarrow V, (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_0, x_1, x_2, \dots) \\ \text{und } g: V &\rightarrow V, (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_1, x_2, x_3, \dots), \end{aligned}$$

so ist  $f$  injektiv aber nicht surjektiv, und  $g$  surjektiv aber nicht injektiv.

Als weitere einfache Konsequenz aus Folgerung 16.27 erhalten wir außerdem, dass sich lineare Abbildungen stets auf einer Basis des Startraums beliebig vorgeben lassen und dann eindeutig bestimmt sind (siehe auch Aufgabe 16.5):

**Folgerung 16.32.** Es seien  $V$  und  $W$  endlich-dimensionale Vektorräume,  $B = (x_1, \dots, x_n)$  eine Basis von  $V$  und  $(y_1, \dots, y_n)$  eine beliebige Familie (mit gleich vielen Elementen) in  $W$ .

Dann gibt es genau eine lineare Abbildung  $f: V \rightarrow W$  mit  $f(x_i) = y_i$  für alle  $i = 1, \dots, n$ .

*Beweis.* Wähle eine Basis  $C$  von  $W$  und betrachte die Abbildungsmatrix  $A_f^{B,C}$  der gesuchten Morphismen, die nach Satz 16.26 die Form  $A_f^{B,C} = (\Phi_C(f(x_1)) \mid \dots \mid \Phi_C(f(x_n)))$  hat. Die Bedingungen  $f(x_i) = y_i$  für alle  $i$  sind offensichtlich äquivalent dazu, dass diese Abbildungsmatrix gleich  $A_f^{B,C} = (\Phi_C(y_1) \mid \dots \mid \Phi_C(y_n))$  ist, und liefern damit genau einen solchen Morphismus.  $\square$

**Aufgabe 16.33.** Es sei  $V = \operatorname{Pol}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit Basis  $B = (1, x, x^2)$ . Wir betrachten die Abbildung  $f: V \rightarrow V$  mit  $f(\varphi)(x) = \varphi'(x+1) + x\varphi(1)$ , wobei  $\varphi'$  die Ableitung von  $\varphi$  bezeichnet.

- Zeige, dass  $f$  eine lineare Abbildung ist.
- Berechne die Abbildungsmatrix  $A_f^{B,B}$ .
- Berechne  $\operatorname{Ker} f$ .

**Aufgabe 16.34.** Es seien

$$U = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \quad \text{und} \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass  $f(U) \subset U$  gilt, bestimme eine Basis  $B$  von  $U$ , und berechne die Abbildungsmatrix der eingeschränkten Abbildung  $f|_U: U \rightarrow U$  bezüglich der Basis  $B$  im Start- und Zielraum.

**Aufgabe 16.35.** Bestimme die Dimension von  $\operatorname{Ker}(g \circ f)$ , wenn  $f: K^8 \rightarrow K^5$  eine surjektive und  $g: K^5 \rightarrow K^7$  eine injektive lineare Abbildung ist.

**Aufgabe 16.36.** Es seien  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum und  $f: V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung mit  $f \circ f = f$ . Man zeige:

- $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ .

- (b) Es gibt eine Basis  $B$  von  $V$ , so dass die Abbildungsmatrix von  $f$  mit gleicher Start- und Zielbasis  $B$  die Form

$$A_f^{B,B} = \left( \begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

mit  $r = \text{rk } f$  hat.

**Aufgabe 16.37.** Es sei  $A \in K^{m \times n}$  eine Matrix vom Rang  $r := \text{rk } A$ . Zeige, dass  $A$  dann als Matrixprodukt  $A = BC$  mit  $B \in K^{m \times r}$  und  $C \in K^{r \times n}$  geschrieben werden kann.

(Hinweis: Betrachte zugehörige lineare Abbildungen und verwende Folgerung 16.27 (b).)

Nach Konstruktion hängen unsere gerade eingeführten Abbildungsmatrizen  $A_f^{B,C}$  natürlich von der (letztlich willkürlichen) Wahl der Basen  $B$  und  $C$  im Start- bzw. Zielraum der Abbildung  $f$  ab. Wir wollen daher nun untersuchen, wie sich diese Abbildungsmatrizen ändern, wenn man zu anderen Basen übergeht. Dazu benötigen wir die sogenannten Basiswechsellmatrizen, die einfach nur ein Spezialfall von Abbildungsmatrizen sind.

**Definition 16.38** (Basiswechsellmatrizen). Es seien  $B = (x_1, \dots, x_n)$  und  $C = (y_1, \dots, y_n)$  zwei Basen eines endlich-dimensionalen  $K$ -Vektorraums  $V$ . Dann heißt die Abbildungsmatrix der Identität  $\text{id}_V$  bezüglich der Startbasis  $B$  und Zielbasis  $C$ , nach Definition 16.26 also

$$A^{B,C} := A_{\text{id}}^{B,C} = (\Phi_C(x_1) \mid \dots \mid \Phi_C(x_n)) \in K^{n \times n},$$

die **Basiswechsellmatrix** von  $B$  nach  $C$ .

**Beispiel 16.39.** Im Vektorraum  $\text{Pol}_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  betrachten wir die beiden Basen

$$B = (1, x) \quad \text{und} \quad C = (x+2, -1).$$

Analog zu Beispiel 16.28 (a) schreiben wir die beiden Basisvektoren von  $B$  als Linearkombinationen der Basisvektoren von  $C$ :

$$1 = 0 \cdot (x+2) + (-1) \cdot (-1) \quad \text{und} \quad x = 1 \cdot (x+2) + 2 \cdot (-1).$$

Damit ist

$$\Phi_C(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi_C(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{B,C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung 16.40.** Es sei  $V$  ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis  $B$ .

- (a) Offensichtlich ist stets  $A^{B,B} = E$ .  
 (b) Ist  $f: V \rightarrow W$  ein Isomorphismus zwischen  $V$  und einem weiteren Vektorraum  $W$  mit Basis  $C$ , so gilt nach Folgerung 16.27 (b)

$$A_{f^{-1}}^{C,B} \cdot A_f^{B,C} = A_{f^{-1} \circ f}^{B,B} = A^{B,B} \stackrel{(a)}{=} E.$$

Die Abbildungsmatrix  $A_f^{B,C}$  zu einem Isomorphismus  $f$  ist also invertierbar mit inverser Matrix  $A_{f^{-1}}^{C,B}$ . Insbesondere erhalten wir daraus für  $V = W$  und  $f = \text{id}_V$ , dass Basiswechsellmatrizen immer invertierbar sind mit  $(A^{B,C})^{-1} = A^{C,B}$ .

Umgekehrt sind invertierbare Matrizen in folgendem Sinne auch immer Basiswechsellmatrizen:

**Lemma 16.41.** Es sei  $B$  eine Basis eines endlich erzeugten Vektorraums  $V$ . Ferner sei  $T \in \text{GL}(n, K)$  eine invertierbare Matrix mit  $n = \dim V$ . Dann gilt:

- (a) Es gibt eine Basis  $C$  von  $V$  mit  $A^{C,B} = T$ .  
 (b) Es gibt eine Basis  $C$  von  $V$  mit  $A^{B,C} = T$ .

*Beweis.*

- (a) Wir setzen  $y_i = \Phi_B^{-1}(Te_i)$  für  $i = 1, \dots, n$ . Da  $T$  invertierbar und  $\Phi_B^{-1}$  ein Isomorphismus ist, ist auch  $K^n \rightarrow V$ ,  $x \mapsto \Phi_B^{-1}(Tx)$  ein Isomorphismus, und bildet nach Lemma 16.17 (c) damit die Standardbasis  $(e_1, \dots, e_n)$  auf eine Basis  $C := (y_1, \dots, y_n)$  von  $V$  ab.

Für  $i = 1, \dots, n$  ist die  $i$ -te Spalte der Basiswechselform  $A^{C,B}$  nun nach Definition 16.38

$$\Phi_B(y_i) = \Phi_B(\Phi_B^{-1}(Te_i)) = Te_i,$$

also die  $i$ -te Spalte von  $T$ . Damit ist wie gewünscht  $A^{C,B} = T$ .

- (b) Nach (a) gibt es eine Basis  $C$  von  $V$  mit  $A^{C,B} = T^{-1}$ , nach Bemerkung 16.40 (b) also mit  $A^{B,C} = T$ .  $\square$