15. Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Wie wir nun schon in einigen Fällen gesehen haben, laufen viele Fragestellungen der linearen Algebra auf rechnerischer Seite am Ende auf *lineare Gleichungssysteme* hinaus – z. B. die Überprüfung von Erzeugendensystemen und der linearen Unabhängigkeit in Beispiel 14.2 (b) bzw. Beispiel 14.5 (b), oder die Berechnung von Durchschnitten und Summen von Unterräumen in Algorithmus 14.27. Mit anderen Worten müssen wir also zu gegebenen $m,n \in \mathbb{N}$ sowie $a_{i,j}, b_i \in K$ für $i = 1,\dots,m$ und $j = 1,\dots,n$ alle $x_1,\dots,x_n \in K$ bestimmen, die simultan die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{$*$}$$

erfüllen. Wir wollen daher in diesem Kapitel studieren, wann solche linearen Gleichungssysteme lösbar sind, und wie im Fall der Lösbarkeit die Lösungsmengen aussehen und konkret berechnet werden können.

15.A Matrizen

Bevor wir mit der eigentlichen Untersuchung linearer Gleichungssysteme beginnen, sollten wir als Erstes eine effizientere Notation dafür einführen, da die Schreibweise $(*)$ in der Einleitung oben natürlich sehr unübersichtlich und fehleranfällig ist. Dies ist mit Hilfe von sogenannten *Matrizen* möglich. Die Idee besteht dabei einfach darin, die $m \cdot n$ Zahlen $a_{i,j}$ in $(*)$ in einem einzigen mathematischen Objekt zusammenzufassen.

Definition 15.1 (Matrizen)**.** Es seien $m,n \in \mathbb{N}$.

(a) Eine $m \times n$-**Matrix** über K ist ein rechteckiges Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a_{i,j} \in K \text{ für alle } 1 \le i \le m \text{ und } 1 \le j \le n$$

mit m Zeilen und n Spalten. Analog zur Schreibweise für Zahlenfolgen in Definition **?? ??** bezeichnen wir eine solche Matrix auch mit

$$(a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \quad \text{oder einfach} \quad (a_{i,j})_{i,j}.$$

Es ist eine Konvention, dass wir dabei hinter den Klammern immer zuerst den Zeilenindex und dann den Spaltenindex angeben (Merkregel: „Zeile zuerst, Spalte später").

Die Menge aller $m \times n$-Matrizen mit Einträgen in K wird mit $K^{m \times n}$ bezeichnet – auch hier steht in der Bezeichnung also zuerst die Anzahl der Zeilen und dann die Anzahl der Spalten.

(b) Eine Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{m \times n}$ mit genauso vielen Zeilen wie Spalten (also $m = n$) heißt **quadratisch**. In diesem Fall bezeichnet man die Einträge $a_{i,i}$ mit $i = 1,\dots,n$ (also die Einträge von links oben nach rechts unten) als die **Diagonaleinträge** der Matrix.

Definition 15.2 (Matrixoperationen)**.** Für zwei Matrizen $A = (a_{i,j})_{i,j}$ und $B = (b_{i,j})_{i,j}$ in $K^{m \times n}$ sowie $\lambda \in K$ definieren wir

(a) die Addition $A + B := (a_{i,j} + b_{i,j})_{i,j} \in K^{m \times n}$;

(b) die Skalarmultiplikation $\lambda A := \lambda \cdot A := (\lambda \cdot a_{i,j})_{i,j} \in K^{m \times n}$;

(c) die **transponierte Matrix** $A^\mathsf{T} := (a_{j,i})_{i,j} \in K^{n\times m}$.

Beispiel 15.3. Die reelle Matrix (z. B. der Größe 2×3), bei der in jeder Zeile i alle Einträge gleich i sind, können wir schreiben als

$$(i)_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

Addition und Skalarmultiplikation für Matrizen (und damit auch für Vektoren) sind einfach komponentenweise definiert, es ist also z. B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad 2\cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^{2\times 3}$. Die Transposition hingegen vertauscht die Rolle von Zeilen und Spalten in der Matrix, wie z. B. in

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^{3\times 2}.$$

Bemerkung 15.4.

(a) Offensichtlich ist $K^{m\times n}$ mit der Addition und Skalarmultiplikation aus Definition 15.2 ein K-Vektorraum. In der Tat unterscheidet sich dieser Raum von K^{mn} ja nur dadurch, dass wir die $m\cdot n$ Einträge der Matrix nicht untereinander, sondern in einem rechteckigen Schema anordnen. Dementsprechend erhält man also auch eine Basis von $K^{m\times n}$, indem man alle Matrizen mit einem Eintrag 1 und allen anderen Einträgen 0 nimmt, im Fall $K^{2\times 2}$ also z. B.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Insbesondere gilt damit $\dim K^{m\times n} = mn$.

(b) Der Nullvektor im Vektorraum $K^{m\times n}$ ist offensichtlich die Matrix, in der alle Einträge gleich 0 sind. Diese Matrix wird dementsprechend auch die **Nullmatrix** genannt und einfach als 0 geschrieben.

(c) Matrizen in $K^{m\times 1}$ mit nur einer Spalte haben in ihrer Schreibweise die gleiche Form wie Vektoren in K^m. In der Tat werden wir $m\times 1$-Matrizen im Folgenden in der Regel mit Vektoren in K^m identifizieren.

Bisher gibt es bis auf die Art der Anordnung der Zahlen keinen nennenswerten Unterschied zwischen den Matrizen in $K^{m\times n}$ und den Vektoren in K^{mn}. Es gibt jedoch eine sehr wichtige weitere Operation, die auf Matrizen, jedoch nicht auf Vektoren in K^{mn} definiert ist, nämlich die sogenannte *Matrixmultiplikation*:

Definition 15.5 (Matrixmultiplikation)**.** Für natürliche Zahlen m,n,p seien $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{m\times n}$ und $B = (b_{j,k})_{j,k} \in K^{n\times p}$, d. h. die Matrix B habe so viele Zeilen wie A Spalten. Dann definieren wir das Matrixprodukt AB als

$$AB := A\cdot B := \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k} \Big)_{i,k} \quad \in K^{m\times p}$$

(merke: Es wird über die „mittleren Indizes“ summiert, also über den Spaltenindex der ersten und den Zeilenindex der zweiten Matrix). Das Produkt AB hat also so viele Zeilen wie die erste Matrix und so viele Spalten wie die zweite.

Beispiel 15.6.

(a) Es ist z. B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 4+1\cdot 7 & 0\cdot 5+1\cdot 8 & 0\cdot 6+1\cdot 9 \\ 2\cdot 4+3\cdot 7 & 2\cdot 5+3\cdot 8 & 2\cdot 6+3\cdot 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 29 & 34 & 39 \end{pmatrix}$$

(hier ist $m = n = 2$ und $p = 3$). Im Gegensatz dazu ist das Matrixprodukt
$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
nicht definiert, weil die erste Matrix drei Spalten, die zweite aber nur zwei Zeilen hat. Der Einfachheit halber werden wir in Zukunft bei einem Matrixprodukt AB stets voraussetzen, dass die zweite Matrix so viele Zeilen hat wie die erste Spalten, und dies nicht jedes Mal wieder erwähnen.

(b) Sind $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{m\times n}$ und $x \in K^n$ mit Koordinaten $x_1,\dots,x_n$, so können wir x gemäß Bemerkung 15.4 (c) als Matrix mit nur einer Spalte auffassen und erhalten das Matrixprodukt
$$Ax = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} \quad \in K^{m\times 1} = K^m.$$
Beachte, dass dieser Ausdruck genau die linke Seite eines linearen Gleichungssystems wie in der Einleitung zu diesem Kapitel ist. Wir können lineare Gleichungssysteme in Zukunft also einfach als $Ax = b$ schreiben, wobei $A \in K^{m\times n}$ eine gegebene Matrix, $b \in K^m$ ein gegebener Vektor und $x \in K^n$ der gesuchte Vektor sind.

(c) Ein einfacher, aber oft vorkommender und daher wichtiger Spezialfall von (b) ist, wenn $x = e_j$ für $j = 1,\dots,n$ der j-te Einheitsvektor ist: In diesem Fall ist Ae_j gerade die j-te Spalte von A.

Wie üblich nach dem Einführen einer neuen Struktur wollen wir auch hier zunächst einmal die grundlegenden Eigenschaften der Matrixmultiplikation angeben bzw. beweisen.

Lemma 15.7 (Eigenschaften der Matrixmultiplikation)**.** *Für alle Matrizen A, B, C passender Größe (d. h. so dass die betrachteten Summen und Produkte definiert sind) sowie $\lambda \in K$ gilt:*

(a) *(Distributivität)* $(A+B)C = AC+BC$ *und* $A(B+C) = AB+AC$.

(b) *(Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation)* $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$.

(c) *(Assoziativität)* $(AB)C = A(BC)$.

Bei der Multiplikation mehrerer Matrizen werden wir die Klammern daher oft weglassen; das n-fache Matrixprodukt $A\cdots A$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ schreiben wir als A^n.

(d) *(Verträglichkeit mit der Transposition)* $(AB)^\mathsf{T} = B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}$.

Das Matrixprodukt ist jedoch im Allgemeinen nicht kommutativ (aufgrund der Größenbedingung ist das Produkt AB ja auch nicht einmal genau dann definiert, wenn BA es ist).

Beweis. Der Beweis ergibt sich durch einfaches Nachrechnen. Wir zeigen exemplarisch den zweiten Teil von (a): Für $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{m\times n}$ und $B = (b_{j,k})_{j,k}, C = (c_{j,k})_{j,k} \in K^{n\times p}$ gilt
$$\begin{aligned} A(B+C) &= \Big(\sum_{j=1}^n a_{i,j}(b_{j,k}+c_{j,k})\Big)_{i,k} \\ &= \Big(\sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,k} + \sum_{j=1}^n a_{i,j}c_{j,k}\Big)_{i,k} \\ &= \Big(\sum_{j=1}^n a_{i,j}b_{j,k}\Big)_{i,k} + \Big(\sum_{j=1}^n a_{i,j}c_{j,k}\Big)_{i,k} \\ &= AB+AC. \end{aligned}$$
□

Bemerkung 15.8 (Blockmatrixmultiplikation). Es seien $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times p}$ zwei Matrizen, die in „Blockform“
$$A = \left(\begin{array}{c|c} A^{(1,1)} & A^{(1,2)} \\ \hline A^{(2,1)} & A^{(2,2)} \end{array}\right) \quad \text{bzw.} \quad B = \left(\begin{array}{c|c} B^{(1,1)} & B^{(1,2)} \\ \hline B^{(2,1)} & B^{(2,2)} \end{array}\right)$$

mit $A^{(1,1)} \in K^{m_1 \times n_1}$ und $B^{(1,1)} \in K^{n_1 \times p_1}$ gegeben sind. Nach Definition der Matrixmultiplikation können wir das Produkt AB dann ebenfalls in Blockform

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} A^{(1,1)}B^{(1,1)} + A^{(1,2)}B^{(2,1)} & A^{(1,1)}B^{(1,2)} + A^{(1,2)}B^{(2,2)} \\ \hline A^{(2,1)}B^{(1,1)} + A^{(2,2)}B^{(2,1)} & A^{(2,1)}B^{(1,2)} + A^{(2,2)}B^{(2,2)} \end{array} \right)$$

schreiben, wobei die Blöcke formal genauso multipliziert und addiert werden, als würde man das Produkt zweier Matrizen der Größe 2×2 berechnen: Ist $A^{(r,s)} = \big(a_{i,j}^{(r,s)}\big)_{i,j}$ und $B^{(r,s)} = \big(b_{j,k}^{(r,s)}\big)_{j,k}$ für $r,s \in \{1,2\}$, so ist z. B. der Eintrag von AB in Zeile $i \le m_1$ und Spalte $k \le p_1$ (also im Block links oben) gegeben durch

$$\sum_{j=1}^{n_1} a_{i,j}^{(1,1)} b_{j,k}^{(1,1)} + \sum_{j=1}^{n-n_1} a_{i,j}^{(1,2)} b_{j,k}^{(2,1)},$$

was genau der Eintrag von $A^{(1,1)}B^{(1,1)} + A^{(1,2)}B^{(2,1)}$ an dieser Stelle ist.

Analog funktioniert diese Regel auch für eine Aufteilung in mehr oder weniger als zwei Blöcke entlang der Zeilen bzw. Spalten. Häufig kommt z. B. der Fall vor, in dem wir die Matrix B spaltenweise als $B = \big(b^{(1)} \,|\, \cdots \,|\, b^{(p)}\big)$ mit $b^{(1)}, \dots, b^{(p)} \in K^n$ schreiben; in diesem Fall ist dann

$$AB = A\big(b^{(1)} \,|\, \cdots \,|\, b^{(p)}\big) = \big(Ab^{(1)} \,|\, \cdots \,|\, Ab^{(p)}\big).$$

Wir werden diese Rechenregeln zur Blockmatrixmultiplikation im Folgenden oft verwenden, ohne jedesmal wieder darauf hinzuweisen.

Aufgabe 15.9.

(a) Finde eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \backslash \{0\}$ mit $A^2 := A \cdot A = 0$.

(b) Finde Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $AB = 0$ und $BA \ne 0$.

Mit Hilfe des Matrixprodukts können wir nun zu jeder Matrix $A \in K^{m\times n}$ zwei Unterräume definieren; einen von K^m und einen von K^n:

Definition 15.10 (Bild und Kern einer Matrix)**.** Für eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ mit $m,n \in \mathbb{N}$ nennen wir

(a) $\operatorname{Im} A := \{Ax : x \in K^n\} \subset K^m$ das **Bild** von A;

(b) $\operatorname{Ker} A := \{x \in K^n : Ax = 0\} \subset K^n$ den **Kern** von A.

Die Bezeichnungen kommen dabei von den englischen Worten „image“ und „kernel“.

Lemma und Definition 15.11 (Rang einer Matrix)**.** *Es sei $A \in K^{m\times n}$ mit $m,n \in \mathbb{N}$.*

(a) $\operatorname{Im} A$ *ist der von den Spalten von A erzeugte Unterraum von K^m.*

Man nennt seine Dimension $\operatorname{rk} A := \dim \operatorname{Im} A$ *den* ***Rang*** *von A; die Bezeichnung kommt dabei vom englischen Wort „rank“.*

(b) $\operatorname{Ker} A$ *ist ein Unterraum von K^n.*

Beweis.

(a) Schreiben wir $A = (a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_n)$ mit $a_1, \dots, a_n \in K^m$, so ist nach Definition des Matrixprodukts

$$\operatorname{Im} A = \{Ax : x \in K^n\} = \{x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n : x_1, \dots, x_n \in K\} = \operatorname{Lin}(a_1, \dots, a_n).$$

Also ist $\operatorname{Im} A$ der von den Spalten von A erzeugte Unterraum.

(b) Wir überprüfen die Unterraumkriterien aus Definition 13.8: Zunächst ist natürlich $A \cdot 0 = 0$, also $0 \in \operatorname{Ker} A$. Für alle $x, y \in \operatorname{Ker} A$ und $\lambda \in K$ gilt außerdem $Ax = Ay = 0$, also auch

$$A(x+y) = Ax + Ay = 0 \quad \text{und} \quad A \cdot \lambda x = \lambda \cdot Ax = 0,$$

und damit $x + y \in \operatorname{Ker} A$ und $\lambda x \in \operatorname{Ker} A$. □

Bemerkung 15.12. Es sei wieder $A \in K^{m\times n}$ mit $m,n \in \mathbb{N}$.

(a) Nach Lemma 15.11 (a) bilden die Spalten von A ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Im} A$. Mit der Basisauswahl aus Satz 14.11 können wir aus diesen Erzeugern eine Basis von $\operatorname{Im} A$ auswählen, die dann $\operatorname{rk} A$ Elemente hat – während mehr als $\operatorname{rk} A$ Elemente nach Folgerung 14.21 (b) natürlich linear abhängig sein müssen. Wir sehen also:

$$\boxed{\text{Der Rang } \operatorname{rk} A \text{ ist die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten von } A.}$$

32

(b) Aus (a) folgt natürlich sofort $\operatorname{rk} A \leq n$. Da $\operatorname{Im} A$ ein Unterraum von K^m ist, gilt nach Lemma 14.23 außerdem auch $\operatorname{rk} A \leq m$.

(c) Die Unterräume $\operatorname{Im} A$ und $\operatorname{Ker} A$ lassen sich auch mit Hilfe des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ interpretieren: Nach Definition ist $\operatorname{Im} A = \{Ax : x \in K^n\}$ die Menge aller $b \in K^m$, für die das Gleichungssystem lösbar ist, und $\operatorname{Ker} A = \{x \in K^n : Ax = 0\}$ die Lösungsmenge im Fall der rechten Seite $b = 0$.

Beispiel 15.13. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}.$$

Dann ist

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} A = 2$$

und

$$\operatorname{Ker} A = \{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = -x_2 + x_3 = 0\} = \operatorname{Lin} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eine wichtige Eigenschaft des Rangs ist, dass er in folgendem Sinne bei der Multiplikation mit einer anderen Matrix nicht größer werden kann.

Lemma 15.14 (Rang eines Produkts)**.** *Es seien $m,n,p \in \mathbb{N}$ sowie $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times p}$. Dann gilt $\operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk} A$ und $\operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk} B$.*

Beweis. Zunächst gilt nach Definition des Bildes

$$\operatorname{Im}(AB) = \{ABx : x \in K^p\} = \{Ay : y \in \operatorname{Im} B\}.$$

Zum einen folgt daraus nun wegen $\operatorname{Im} B \subset K^n$

$$\operatorname{Im}(AB) \subset \{Ay : y \in K^n\} = \operatorname{Im} A,$$

und damit $\operatorname{rk}(AB) \leq \operatorname{rk} A$. Zum anderen können wir mit $r := \operatorname{rk} B$ eine Basis $(b_1, \dots, b_r)$ von $\operatorname{Im} B$ wählen und erhalten

$$\operatorname{Im}(AB) = \{A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_r b_r) : \lambda_1, \dots, \lambda_r \in K\} = \operatorname{Lin}(Ab_1, \dots, Ab_r),$$

nach Bemerkung 14.22 (a) also auch $\operatorname{rk}(AB) \leq r = \operatorname{rk} B$. □

Aufgabe 15.15 (Rang einer Summe)**.** Es seien $m,n \in \mathbb{N}$ und $A,B \in K^{m\times n}$.

Zeige, dass dann $\operatorname{rk}(A+B) \leq \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B$ gilt.

Zum Ende dieses Abschnitts wollen wir nun noch die formalen Eigenschaften der Matrixmultiplikation betrachten. Nachdem sie nach Lemma 15.7 (c) schon einmal assoziativ ist, ist es dabei naheliegend zu untersuchen, ob sie auch die anderen Gruppenaxiome aus Definition 3.1 erfüllt. Damit sie überhaupt zwischen allen betrachteten Matrizen definiert ist, sollten wir uns dazu auf quadratische Matrizen einer festen Größe beschränken. Ein – wie in Definition 3.1 (b) gefordertes – neutrales Element ist dann schnell gefunden:

Konstruktion 15.16 (Einheitsmatrix)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die **Einheitsmatrix** der Größe $n \times n$ als die Matrix, deren Einträge auf der Diagonale gleich 1 und sonst überall 0 sind, also

$$E_n := (e_1 \,|\, \cdots \,|\, e_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in K^{n \times n}.$$

Wir schreiben sie oft auch einfach als E, wenn ihre Größe aus dem Zusammenhang klar ist. In der Literatur ist manchmal auch die Bezeichnung I_n oder I üblich. Offensichtlich gilt nun für jede Matrix $A = (a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_n) \in K^{m \times n}$

$$AE_n = A \cdot (e_1 \,|\, \cdots \,|\, e_n) \overset{15.8}{=} (Ae_1 \,|\, \cdots \,|\, Ae_n) \overset{15.6\,(c)}{=} (a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_n) = A,$$

und damit analog auch $A^\mathsf{T} E_m = A^\mathsf{T}$, nach Transponieren mit Lemma 15.7 (d) also $E_m A = A$. Die Einheitsmatrizen sind in diesem Sinne also (sogar für nicht-quadratische Matrizen) neutral für die Matrixmultiplikation. Außerdem ist natürlich $\operatorname{rk} E_n = n$, denn es gilt $\operatorname{Im} E_n = \operatorname{Lin}(e_1, \dots, e_n) = K^n$.

Wie wir jetzt sehen wollen, existieren inverse Matrizen jedoch nicht immer, sondern nur zu Matrizen mit maximalem Rang.

Satz und Definition 15.17 (Inverse Matrizen)**.** *Für jede quadratische Matrix $A \in K^{n \times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\operatorname{rk} A = n$.

(b) *Es gibt eine rechtsinverse Matrix B zu A, also eine Matrix $B \in K^{n \times n}$ mit $AB = E$.*

(c) *Es gibt eine linksinverse Matrix B zu A, also eine Matrix $B \in K^{n \times n}$ mit $BA = E$.*

Eine quadratische Matrix A mit diesen Eigenschaften heißt ***invertierbar****. In diesem Fall sind die rechts- und linksinverse Matrix zu A außerdem eindeutig bestimmt und gleich; man schreibt sie als A^{-1} und nennt sie die zu A* ***inverse Matrix****.*

Beweis.

(a) $\Rightarrow$ (b): Nach Voraussetzung gilt $\operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Im} A = n$, mit Lemma 14.23 also $\operatorname{Im} A = K^n$. Für alle $i = 1, \dots, n$ ist damit $e_i \in \operatorname{Im} A$, d. h. es gibt ein $b_i \in K^n$ mit $Ab_i = e_i$. Definieren wir nun $B := (b_1 \,|\, \cdots \,|\, b_n)$, so ergibt sich wie gewünscht

$$AB = A \cdot (b_1 \,|\, \cdots \,|\, b_n) \overset{15.8}{=} (Ab_1 \,|\, \cdots \,|\, Ab_n) = (e_1 \,|\, \cdots \,|\, e_n) = E.$$

(b) $\Rightarrow$ (c): Wegen $\operatorname{rk}(AB) = \operatorname{rk} E = n$ folgt zunächst $\operatorname{rk} B = n$ aus Lemma 15.14. Nach der schon gezeigten Richtung „(a) $\Rightarrow$ (b)“ gibt es also eine Matrix $C \in K^{n \times n}$ mit $BC = E$. Dabei ist aber $C = EC = ABC = AE = A$, also wie behauptet $BA = E$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Wegen $\operatorname{rk}(BA) = \operatorname{rk} E = n$ folgt dies sofort aus Lemma 15.14.

Sind diese Bedingungen erfüllt und B eine rechts- bzw. C eine linksinverse Matrix zu A, so gilt außerdem $C = CE = CAB = EB = B$, d. h. B und C sind eindeutig bestimmt und gleich. □

Lemma und Definition 15.18 (Invertierbare Matrizen als Gruppe)**.** *Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in K^{n \times n}$ zwei invertierbare Matrizen. Dann gilt:*

(a) *AB ist ebenfalls invertierbar mit $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.*

(b) *A^{-1} ist ebenfalls invertierbar mit $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Insbesondere ist die Menge aller invertierbaren Matrizen in $K^{n \times n}$ also eine Gruppe bezüglich der Matrixmultiplikation. Man bezeichnet sie mit $\mathrm{GL}(n, K)$ (der Name kommt vom englischen Begriff „general linear group“).

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $A^{-1}A = B^{-1}B = E$ gemäß Satz 15.17 (c). Also folgt
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$$
und damit Teil (a); Teil (b) ergibt sich direkt aus $A^{-1}A = E$ mit Satz 15.17 (b).

Damit ist $\mathrm{GL}(n,K)$ eine Gruppe: Die Matrixmultiplikation ist eine Verknüpfung auf dieser Menge nach (a) und assoziativ nach Lemma 15.7 (c), und $\mathrm{GL}(n,K)$ enthält das neutrale Element E sowie zu jeder Matrix A die inverse Matrix A^{-1} nach (b). □

Beispiel 15.19. Die reelle Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \operatorname{rk} A = \dim \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 2$$
ist nach Definition 15.17 invertierbar. In der Tat ist
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{und damit} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Wir werden in Satz 15.34 noch sehen, wie inverse Matrizen effizient berechnet werden können.

Bemerkung 15.20. Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{GL}(n,K)$ eine invertierbare Matrix.

(a) Die Inversenbildung vertauscht mit der Transposition, d. h. es gilt $(A^\mathsf{T})^{-1} = (A^{-1})^\mathsf{T}$, denn es ist
$$(A^{-1})^\mathsf{T} A^\mathsf{T} \overset{15.7\,(d)}{=} (AA^{-1})^\mathsf{T} = E^\mathsf{T} = E,$$
und damit ist $(A^{-1})^\mathsf{T}$ die inverse Matrix zu A^T.

(b) Für alle $b \in K^n$ ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ äquivalent zu $x = A^{-1}b$, hat also diese eindeutige Lösung für x. Diese Aussage ist momentan aber eher für theoretische Zwecke als für konkrete Berechnungen nützlich, zumal wir ja noch keine gute Berechnungsmöglichkeit für inverse Matrizen kennen.

Aufgabe 15.21. Für ein gegebenes $a \in \mathbb{R}$ sei $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Berechne A^n für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

(Hinweis: Bestimme A^n für kleine Werte von n, stelle damit eine Vermutung für die allgemeine Form von A^n auf, und beweise diese Vermutung dann mit vollständiger Induktion.)

(b) Für welche a ist die Matrix A invertierbar? Bestimme in diesen Fällen auch die inverse Matrix A^{-1}.

Aufgabe 15.22. Es seien $m,n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix vom Rang r. Für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \le m$ und $k \le n$ verstehen wir unter einer ***$k \times k$-Teilmatrix*** von A eine Matrix, die man erhält, indem man aus A eine beliebige Auswahl von Zeilen und Spalten herausstreicht, so dass eine quadratische Matrix der Größe $k \times k$ übrig bleibt.

Zeige, dass es genau dann eine invertierbare $k \times k$-Teilmatrix von A gibt, wenn $k \le r$ gilt.

15.B Der Gauß-Algorithmus

Wie bereits angekündigt wollen wir jetzt untersuchen, wie man lineare Gleichungssysteme – die wir in Matrixschreibweise nach Beispiel 15.6 (b) nun als $Ax = b$ mit $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^m$ schreiben werden – explizit numerisch lösen kann. Wie ihr natürlich wisst, besteht die Strategie hierbei darin, die gegebenen Gleichungen mit einem geeigneten Algorithmus z. B. durch Addition, Subtraktion oder Multiplikation mit Skalaren so umzuformen und zu kombinieren, dass ein äquivalentes Gleichungssystem entsteht, dessen Lösung man leicht ablesen kann. In der Matrixform entspricht nun jede Gleichung einer Zeile der Matrix A, und demzufolge wollen wir also die Zeilen der Matrix umformen und miteinander kombinieren können. Diese Zeilenumformungen entsprechen in unserer Schreibweise einfachen Matrixmultiplikationen, die wir jetzt einführen wollen.

Konstruktion 15.23 (Elementarmatrizen)**.** Es seien $m,n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{m\times n}$.

(a) Für $k \in \{1,\dots,m\}$ und $\lambda \in K\backslash\{0\}$ setzen wir

$$F_k(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \in K^{m\times m},$$

wobei der Eintrag λ in Zeile und Spalte k steht. Die Matrix $F_k(\lambda)$ ist also nichts weiter als die Einheitsmatrix, bei der der Eintrag 1 in der k-ten Zeile und Spalte durch ein $\lambda \neq 0$ ersetzt wurde. Mit dieser Matrix ist

$$F_k(\lambda)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{k,1} & \cdots & \lambda a_{k,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix},$$

d. h. die Multiplikation von A mit $F_k(\lambda)$ von links entspricht der Multiplikation der k-ten Zeile von A mit λ.

(b) Für $k,l \in \{1,\dots,m\}$ mit $k \neq l$ und $\lambda \in K$ setzen wir

$$F_{k,l}(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \lambda & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{m\times m},$$

wobei der Eintrag λ in Zeile k und Spalte l steht, d. h. diesmal haben wir in der Einheitsmatrix den Eintrag 0 in Zeile k und Spalte l durch λ ersetzt. (Beachte, dass der Eintrag λ für $k < l$ oberhalb und für $k > l$ unterhalb der Diagonalen steht; wir haben in der Matrix oben der Einfachheit halber nur den Fall $k < l$ dargestellt.) In diesem Fall ist

$$F_{k,l}(\lambda)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \lambda & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l,1} & \cdots & a_{l,n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ a_{k,1}+\lambda a_{l,1} & \cdots & a_{k,n}+\lambda a_{l,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l,1} & \cdots & a_{l,n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix},$$

d. h. die Multiplikation von A mit $F_{k,l}(\lambda)$ von links entspricht der Addition des λ-fachen von Zeile l zu Zeile k.

Die Matrizen $F_k(\lambda)$ für $\lambda \in K\backslash\{0\}$ sowie $F_{k,l}(\lambda)$ für $k \neq l$ und $\lambda \in K$ heißen **Elementarmatrizen**. Es gibt sie in jeder (quadratischen) Größe $m \times m$; zur Vereinfachung der Schreibweise deuten wir diese Größe in der Notation $F_k(\lambda)$ bzw. $F_{k,l}(\lambda)$ aber nicht an.

Man sagt, dass $F_k(\lambda)\cdot A$ und $F_{k,l}(\lambda)\cdot A$ aus A durch eine **elementare Zeilenumformung** entstehen.

Bemerkung 15.24.

(a) Die Elementarmatrizen sind invertierbar mit

$$(F_k(\lambda))^{-1} = F_k\Big(\frac{1}{\lambda}\Big) \quad \text{und} \quad (F_{k,l}(\lambda))^{-1} = F_{k,l}(-\lambda).$$

Dies folgt direkt aus Konstruktion 15.23: Wenn wir z. B. das Matrixprodukt

$$F_k\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)\cdot F_k(\lambda) = F_k\Big(\frac{1}{\lambda}\Big)\cdot F_k(\lambda)\cdot E$$

bilden, multiplizieren wir die k-te Zeile in der Einheitsmatrix zuerst mit λ und dann mit $\frac{1}{\lambda}$, d. h. es kommt insgesamt wieder die Einheitsmatrix heraus – also ist $F_k(\frac{1}{\lambda}) \cdot F_k(\lambda) = E$, und damit $(F_k(\lambda))^{-1} = F_k(\frac{1}{\lambda})$.

Analog zeigt man die Aussage über das Inverse von $F_{k,l}(\lambda)$.

(b) Führen wir mit einer Matrix A mehrere elementare Zeilenumformungen aus, so ist das Ergebnis nach Konstruktion 15.23 eine Matrix $F_1 \cdot \dots \cdot F_r \cdot A$ mit Elementarmatrizen $F_1, \dots, F_r$. Da diese Elementarmatrizen nach (a) invertierbar sind, ist das Produkt $F := F_1 \cdot \dots \cdot F_r$ nach Lemma 15.18 (a) ebenfalls wieder invertierbar. Das Ergebnis der Zeilenumformungen ist also die Matrix FA, d. h. wir haben A von links mit einer invertierbaren Matrix F multipliziert. In der Tat werden wir in Folgerung 15.35 noch sehen, dass *jede* invertierbare Matrix ein Produkt von Elementarmatrizen ist, also jede Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix von links als Abfolge von elementaren Zeilenumformungen geschrieben werden kann.

(c) Das Vertauschen von zwei Zeilen $k, l \in \{1, \dots, m\}$ mit $k \neq l$ in einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ lässt sich als Folge von elementaren Zeilenumformungen wie in (b) realisieren: Sind $a_1, \dots, a_m$ die Zeilen von A, so erhalten wir

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k \\ \vdots \\ a_l \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{k,l}(1)\cdot} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k + a_l \\ \vdots \\ a_l \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{l,k}(-1)\cdot} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_k + a_l \\ \vdots \\ -a_k \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{F_{k,l}(1)\cdot} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_l \\ \vdots \\ -a_k \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{F_l(-1)\cdot} \begin{pmatrix} \vdots \\ a_l \\ \vdots \\ a_k \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

(d) Man kann die Elementarmatrizen auch verwenden, um analog *elementare Spaltenumformungen* durchzuführen: Multipliziert man eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ mit einer Elementarmatrix $F_k(\lambda)$ (der Größe n) *von rechts*, so entspricht dies der Multiplikation der k-ten *Spalte* von A mit λ. Analog addiert man das λ-fache von Spalte k zu Spalte l von A, wenn man das Produkt $A \cdot F_{k,l}(\lambda)$ bildet. Wie in (b) lässt sich eine Abfolge von elementaren Spaltenumformungen also durch Multiplikation mit einer invertierbaren Matrix von rechts beschreiben.

Mit derartigen Zeilenumformungen wollen wir jetzt eine Matrix bzw. ein lineares Gleichungssystem auf eine möglichst einfache Form bringen. Die folgende Form wird dabei herauskommen.

Definition 15.25 (Zeilenstufenform)**.** Es seien $m, n, r \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{m \times n}$.

(a) Wir sagen, dass A in **Zeilenstufenform** (mit r Stufen ist), wenn

$$\begin{array}{rc} & \begin{matrix} k_1 & & k_2 & & & k_r \\ \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \end{matrix} \\ A = & \begin{pmatrix} \lfloor 1 & & & & & * \\ & & \lfloor 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ 0 & & & & \lfloor 1 & \end{pmatrix} \end{array}$$

ist, wobei das Symbol „$*$“ für beliebige Einträge steht. Mit anderen Worten gibt es also Spalten $1 \leq k_1 < \dots < k_r \leq n$ (die sogenannten **Stufenspalten**), so dass gilt:

- $a_{i,k_i} = 1$ für alle $i = 1, \dots, r$;
- rechts hiervon stehen beliebige Einträge (d. h. $a_{i,j}$ ist beliebig falls $i \leq r$ und $j > k_i$);
- alle anderen Einträge sind 0.

(b) Sind zusätzlich noch außer den geforderten Einsen alle anderen Einträge in den Stufenspalten gleich Null, ist also sogar

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1 \quad * \cdots * } & 0 & * \cdots * & & 0 & * \cdots * \\ & \boxed{1} & * \cdots * & & 0 & * \cdots * \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \mathbf{0} & & & \boxed{1} & * \cdots * \end{pmatrix}$$

(d. h. $a_{l,k_i} = 0$ für alle $l < i \leq r$), so sagt man, dass A in **reduzierter Zeilenstufenform** ist.

Wie schon angekündigt besagt der folgende wichtige Satz nun, dass man jede Matrix mit elementaren Zeilenumformungen auf diese Formen bringen kann. Dabei sind beide Formen in der Praxis wichtig: Die reduzierte Zeilenstufenform ist natürlich „schöner", weil sie mehr Nullen enthält und damit einfacher ist – andererseits werden wir aber sehen, dass die normale, nicht-reduzierte Zeilenstufenform für viele Zwecke ausreichend und mit weniger Rechenaufwand zu erzielen ist. In der Tat ist der Beweis des Satzes auch konstruktiv in dem Sinne, dass er explizit eine mögliche Vorgehensweise angibt, wie eine (reduzierte) Zeilenstufenform mit elementaren Zeilenumformungen erreicht werden kann. Dieser sogenannte Gauß-Algorithmus im Beweis ist mindestens genauso wichtig wie die eigentliche Aussage:

Satz 15.26 (Gauß-Algorithmus). *Jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ lässt sich durch elementare Zeilenumformungen in (reduzierte) Zeilenstufenform bringen.*

Mit anderen Worten (siehe Bemerkung 15.24 (b)) gibt es also ein Produkt $F \in \mathrm{GL}(m,K)$ von Elementarmatrizen, so dass FA in (reduzierter) Zeilenstufenform ist.

Beweis. Wir beweisen den Satz mit Induktion über die Anzahl n der Spalten von A. Da für $n = 0$ nichts zu zeigen ist, müssen wir nur den Induktionsschritt $n \to n+1$ durchführen. Es sei also $A \in K^{m\times(n+1)}$ beliebig vorgegeben. Wir wollen A mit elementaren Zeilenumformungen in (reduzierte) Zeilenstufenform bringen und nehmen nach Induktionsvoraussetzung an, dass wir dies für alle Matrizen mit n Spalten bereits können. Wir unterscheiden dabei zwei Fälle:

Fall 1: Alle Einträge in der ersten Spalte von A sind 0, d. h. es ist $A = (0\,|\,A')$ für eine Matrix $A' \in K^{m\times n}$. Nach Induktionsvoraussetzung können wir dann A' durch elementare Zeilenumformungen in (reduzierte) Zeilenstufenform bringen. Da diese Zeilenumformungen an der ersten Nullspalte aber nichts ändern, haben wir damit auch A in (reduzierte) Zeilenstufenform gebracht.

Fall 2: Es sind nicht alle Einträge in der ersten Spalte von A gleich 0.

(a) Falls der Eintrag $a_{1,1}$ links oben in A gleich Null ist, vertauschen wir zwei Zeilen von A so, dass dieser Eintrag nicht mehr gleich 0 ist (nach Bemerkung 15.24 (c) ist dies durch elementare Zeilenumformungen machbar).

(b) Wir dividieren die erste Zeile durch $a_{1,1}$ und erhalten eine Matrix der Form

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ a_{2,1} & \\ \vdots & * \\ a_{m,1} & \end{array}\right).$$

(c) Wir subtrahieren von jeder Zeile $k \in \{2,\dots,m\}$ das $a_{k,1}$-fache der ersten Zeile und bekommen dadurch

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right)$$

mit einer Matrix $A' \in K^{(m-1)\times n}$.

(d) Nach Induktionsvoraussetzung können wir A' jetzt mit elementaren Zeilenumformungen in Zeilenstufenform bringen. Damit ist aber auch die gesamte Matrix bereits in Zeilenstufenform – wollen wir also nur diese normale, nicht-reduzierte Zeilenstufenform erreichen, so sind wir damit fertig.

(e) Wollen wir eine reduzierte Zeilenstufenform erreichen, bringen wir A' gemäß der Induktionsvoraussetzung sogar in reduzierte Zeilenstufenform und bekommen eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & * \cdots * & * & * \cdots * & & * & * \cdots * \\ 0 & & 1 & * \cdots * & & 0 & * \cdots * \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \mathbf{0} & & & 1 & * \cdots * \\ 0 & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Subtrahieren wir nun geeignete Vielfache der Zeilen $2,\dots,m$ von der ersten Zeile, so können wir damit dann noch die Einträge in den Stufenspalten der ersten Zeile zu Null machen und erhalten so auch die reduzierte Zeilenstufenform. □ 33

Beispiel 15.27. Wir wollen die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$$

mit elementaren Zeilenumformungen in Zeilenstufenform bringen. Dazu können wir nach dem Verfahren im Beweis von Satz 15.26 wie folgt vorgehen (die Notation $Z3-3Z2 \to Z3$ bedeutet dabei z. B., dass wir das Dreifache der zweiten Zeile von der dritten subtrahieren):

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-Z1\to Z1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 & -4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z3-Z1\to Z3]{Z2+Z1\to Z2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z3-3Z2\to Z3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Möchten wir eine Matrix in reduzierter Zeilenstufenform erreichen, so addieren wir schließlich noch das Doppelte der zweiten Zeile zur ersten und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 15.28. Bringe die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

mit elementaren Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform.

15.C Algorithmen der linearen Algebra

Nachdem wir jetzt gesehen haben, wie man eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ mit dem Gauß-Algorithmus durch elementare Zeilenumformungen in (evtl. reduzierte) Zeilenstufenform bringen kann, wollen wir nun untersuchen, wie man damit die in der linearen Algebra auftretenden Fragestellungen numerisch lösen kann. Für die Beweise dieser Aussagen ist es dabei nützlich, die Zeilenstufenform von A wie in Satz 15.26 als FA für eine invertierbare Matrix $F \in \mathrm{GL}(m,K)$ zu schreiben – beachte jedoch, dass wir diese Matrix F für konkrete Anwendungen oft gar nicht explizit kennen müssen, sondern es genügt, wenn wir wie in Beispiel 15.27 direkt die Zeilenstufenform FA bestimmen.

Wir beginnen dabei mit dem Rang von A. Dieser ist sehr einfach zu bestimmen, er ist nämlich wie im folgenden Satz immer die Anzahl der Stufen in einer zugehörigen Zeilenstufenform. Gleichzeitig liefert dieses Argument nicht nur den Rang – also die Dimension von $\mathrm{Im}\,A$ – sondern auch eine Basis von $\mathrm{Im}\,A$, nämlich indem wir die Spalten von A nehmen, die den Stufenspalten entsprechen.

Satz 15.29 (Bild und Rang einer Matrix)**.** *Es seien $m,n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_n) \in K^{m\times n}$. Wir bringen die Matrix A in Zeilenstufenform FA mit $F \in \mathrm{GL}(m,K)$; dabei seien r die Anzahl der Stufen und $k_1 < \cdots < k_r$ die Stufenspalten von FA.*

Dann ist die Familie $(a_{k_1},\dots,a_{k_r})$ eine Basis von $\mathrm{Im}\,A$. Insbesondere gilt also $\mathrm{rk}\,A = r$.

Beweis. Da wir jede Matrix in Zeilenstufenform mit dem Gauß-Algorithmus aus Satz 15.26 in reduzierte Zeilenstufenform mit denselben Stufenspalten überführen können, können wir annehmen, dass $FA = (Fa_1 \,|\, \cdots \,|\, Fa_n)$ sogar in reduzierter Zeilenstufenform ist. Für alle $i = 1,\dots,r$ ist die i-te Stufenspalte der Matrix FA dann gleich $Fa_{k_i} = e_i$. Wir müssen nun zwei Dinge zeigen:

(a) $B := (a_{k_1},\dots,a_{k_r})$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Im}\,A$: Da FA in Zeilenstufenform mit r Stufen ist, haben die Spalten von FA höchstens in den ersten r Zeilen Einträge ungleich 0. Es gilt also nicht nur $\mathrm{Lin}(Fa_{k_1},\dots,Fa_{k_r}) = \mathrm{Lin}(e_1,\dots,e_r)$, sondern sogar

$$\mathrm{Lin}(Fa_{k_1},\dots,Fa_{k_r}) = \mathrm{Lin}(e_1,\dots,e_r) = \mathrm{Lin}(Fa_1,\dots,Fa_n).$$

Multiplikation mit F^{-1} von links ergibt also wie behauptet

$$\mathrm{Lin}\,B = \mathrm{Lin}(a_{k_1},\dots,a_{k_r}) = \mathrm{Lin}(a_1,\dots,a_n) = \mathrm{Im}\,A.$$

(b) B ist linear unabhängig: Es seien $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in K$ mit $\lambda_1 a_{k_1} + \cdots + \lambda_r a_{k_r} = 0$. Multiplikation mit F von links liefert dann sofort

$$\lambda_1 Fa_{k_1} + \cdots + \lambda_r Fa_{k_r} = 0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r = 0,$$

und damit $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$. □

Beispiel 15.30. Wir betrachten noch einmal die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

wie in Beispiel 15.27. Dort hatten wir A in eine Zeilenstufenform mit zwei Stufen und den Stufenspalten 1 und 3 gebracht. Nach Satz 15.29 ist also $\mathrm{rk}\,A = 2$, und die erste und dritte Spalte der Ausgangsmatrix A (nicht der Zeilenstufenform!) ergeben für $\mathrm{Im}\,A$ die Basis

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Als Nächstes wollen wir lineare Gleichungssysteme betrachten, die wir gemäß Beispiel 15.6 (b) in Matrixform als $Ax = b$ schreiben können.

Algorithmus 15.31 (Lösungen linearer Gleichungssysteme)**.** Es seien $m,n \in \mathbb{N}$ sowie $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^m$. Wir möchten das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösen, und damit insbesondere im Fall $b = 0$ auch $\mathrm{Ker}\,A$ bestimmen.

Dazu bilden wir zunächst aus den gegebenen Daten die sogenannte *erweiterte Koeffizientenmatrix* $(A \,|\, b) \in K^{m\times(n+1)}$ und bringen sie mit elementaren Zeilenumformungen in reduzierte Zeilenstufenform $F(A \,|\, b) = (FA \,|\, Fb)$ mit $F \in \mathrm{GL}(m,K)$. Da F invertierbar ist, ist das ursprüngliche Gleichungssystem $Ax = b$ äquivalent zu $FAx = Fb$, d. h. wir haben die Lösungsmenge des Gleichungssystems durch den Übergang von $(A\,|\,b)$ zu $(FA\,|\,Fb)$ nicht geändert und können ab jetzt nur noch das umgeformte System betrachten. Dementsprechend schreiben wir im Folgenden die Einträge von FA als $a_{i,j}$ und die Koordinaten von Fb als b_i für $i = 1,\dots,m$ und $j = 1,\dots,n$.

Durch die Umformung ist natürlich auch FA in reduzierter Zeilenstufenform mit $r := \operatorname{rk} A$ Stufen (siehe Satz 15.29). Bezeichnen wir die Stufenspalten von FA mit $k_1 < \cdots < k_r$ und die Nichtstufenspalten mit $j_1 < \cdots < j_{n-r}$, so ist also

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} k_1 & & k_2 & & & k_r & \\ \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & \end{array} \\
(FA\,|\,Fb) = & \left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & *\cdots* & 0 & *\cdots* & & 0 & *\cdots* & b_1\\
 & & 1 & *\cdots* & & 0 & *\cdots* & b_2\\
 & & & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\
 & & & & & 1 & *\cdots* & b_r\\
 & \mathbf{0} & & & & & & b_{r+1}\\
 & & & & & & & 0\\
 & & & & & & & \vdots\\
 & & & & & & & 0
\end{array}\right).
\end{array}
$$

Für den Eintrag b_{r+1} gibt es dabei zwei Möglichkeiten:

(a) $b_{r+1} = 1$, also $\operatorname{rk}(A\,|\,b) = r+1$: Zeile $r+1$ des umgeformten Gleichungssystems $FAx = Fb$ ergibt dann den Widerspruch $0 = 1$, d. h. in diesem Fall existiert keine Lösung.

(b) $b_{r+1} = 0$, also $\operatorname{rk}(A\,|\,b) = r$: In diesem Fall sind die Nichtstufenvariablen $x_{j_1},\dots,x_{j_{n-r}}$ frei wählbar, und Zeile i für $i = 1,\dots,r$ bestimmt daraus die i-te Stufenvariable x_{k_i} eindeutig zu

$$x_{k_i} = b_i - \sum_{l=1}^{n-r} a_{i,j_l} x_{j_l} \quad \in K, \tag{1}$$

wobei a_{i,j_l} die Einträge „$*$" in der obigen Matrix sind (und nur ungleich 0 sein können, falls $j_l > k_i$ ist, was im Folgenden aber keine Rolle spielt).

Alternativ hätten wir $(A\,|\,b)$ auch nur in nicht notwendig reduzierte Zeilenstufenform bringen können (was natürlich weniger Arbeit ist). Dann drückt Zeile i des umgeformten Gleichungssystems die i-te Stufenvariable x_{k_i} durch alle freien Variablen $x_{j_1},\dots,x_{j_{n-r}}$ *und die weiter rechts stehenden Stufenvariablen* $x_{k_{i+1}},\dots,x_{k_r}$ aus. Wir müssen diese Zeilen dann also von unten nach oben durchgehen und so der Reihe nach $x_{k_r},\dots,x_{k_1}$ aus den freien Variablen *und den bereits bestimmten Stufenvariablen* berechnen (was dann wieder etwas mehr Arbeit ist).

Im Fall (b) der Lösbarkeit haben wir oben in (1) den Wert jeder Variablen einzeln angegeben. Fassen wir nun noch alle diese Komponenten von x zu einem Vektor zusammen, so können wir die Lösung auch schreiben als

$$x = w - \sum_{l=1}^{n-r} x_{j_l} w_{j_l} \quad \in K^n, \tag{2}$$

wobei die Koordinaten der Vektoren $w_{j_1},\dots,w_{j_{n-r}},w$ gegeben sind durch:

- die k_i-te Koordinate von w_{j_l} bzw. w ist a_{i,j_l} bzw. b_i für $i = 1,\dots,r$ und $j = 1,\dots,n-r$ (die Koordinate k_i von (2) wird damit genau (1));
- die j_l-te Koordinate von w_{j_l} ist -1 für $j = 1,\dots,n-r$, und alle anderen Koordinaten zu Nichtstufenvariablen in w_{j_l} und w sind 0 (die Koordinate j_l von (2) wird damit die triviale Gleichung $x_{j_l} = x_{j_l}$).

Als Merkregel können wir die Vektoren $w_{j_1},\dots,w_{j_{n-r}},w$ damit als die entsprechenden Spalten der folgenden Matrix $W = (w_1\,|\cdots|\,w_n\,|\,w) \in K^{n\times(n+1)}$ erhalten:

> Zu einer gegebenen Matrix $(FA\,|\,Fb) \in K^{m\times(n+1)}$ in reduzierter Zeilenstufenform mit Stufenspalten $k_1 < \cdots < k_r$ konstruieren wir eine Matrix $W \in K^{n\times(n+1)}$, indem wir für $i = 1,\dots,r$ Zeile i von $(FA\,|\,Fb)$ in Zeile k_i von W schreiben; die restlichen Einträge von W sind -1 auf der Diagonalen und 0 sonst.

Die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ ist mit diesen Bezeichnungen nach (2) dann also $w+\mathrm{Lin}(w_{j_1},\dots,w_{j_{n-r}})$; im Fall $b = 0$ für die Berechnung von $\mathrm{Ker}A$ ist dabei natürlich auch $w = 0$.

Die hierbei auftretenden Vektoren $w_{j_1},\dots,w_{j_{n-r}}$ sind darüber hinaus linear unabhängig: Sind nämlich $\lambda_1,\dots,\lambda_{n-r} \in K$ mit $\lambda_1 w_{j_1}+\cdots+\lambda_{n-r}w_{j_{n-r}} = 0$, so besagt die j_l-te Koordinate dieser Gleichung genau $\lambda_l \cdot (-1) = 0$ für alle $l = 1,\dots,n-r$.

Fassen wir die Ergebnisse unserer gesamten Konstruktion zusammen, haben wir damit insgesamt also gezeigt:

Satz 15.32 (Kern einer Matrix und lineare Gleichungssysteme)**.** *Es seien $m,n \in \mathbb{N}$ sowie $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^m$ mit $r := \mathrm{rk}A$. Wir bringen die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A\,|\,b)$ in reduzierte Zeilenstufenform mit Nichtstufenspalten $1 \le j_1 < \cdots < j_{n-r} \le n$ von A, und bilden dazu die Matrix $W = (w_1\,|\cdots|\,w_n\,|\,w) \in K^{n\times(n+1)}$ aus Algorithmus 15.31. Dann gilt:*

(a) *Die Familie $(w_{j_1},\dots,w_{j_{n-r}})$ ist eine Basis von $\mathrm{Ker}A$. Insbesondere ist die Dimension des Kerns also $\dim\mathrm{Ker}A = n-r = n-\mathrm{rk}A$, und es folgt die* ***Dimensionsformel für Matrizen***

$$\dim\mathrm{Im}A+\dim\mathrm{Ker}A = n.$$

(b) *Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn $\mathrm{rk}(A\,|\,b) = \mathrm{rk}A$ gilt. In diesem Fall ist die Lösungsmenge gegeben durch*

$$\{x \in K^n : Ax = b\} = w+\mathrm{Ker}A$$

und damit ein verschobener Unterraum der Dimension $n-r$.

Beispiel 15.33. Über dem Körper $\mathbb{R}$ seien

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A\,|\,b)$ ist dann genau die Matrix, die wir in Beispiel 15.27 in reduzierte Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{$*$}$$

gebracht haben; im linken Teil der Matrix haben wir dabei auch A in reduzierte Zeilenstufenform gebracht. Nach dieser Umformung besagt das Gleichungssystem $Ax = b$ nun genau

$$x_1-2x_2-x_4 = 2 \quad \text{und} \quad x_3+x_4 = 3,$$

was sich natürlich auch ohne einen weiteren Algorithmus leicht lösen lässt: Die Nichtstufenvariablen x_2 und x_4 sind frei wählbar, und die anderen beiden Variablen gegeben durch $x_1 = 2x_2+x_4+2$ und $x_3 = -x_4+3$.

Wollen wir trotzdem das obige „Kochrezept“ aus Algorithmus 15.31 bzw. Satz 15.32 verwenden, lesen wir an $(*)$ zunächst ab, dass $\mathrm{rk}(A\,|\,b) = 2 = \mathrm{rk}A$ gilt und das Gleichungssystem damit lösbar ist. Wir bilden die Matrix $W \in \mathbb{R}^{4\times 5}$, indem wir die Zeilen 1 und 2 von $(*)$ in die Zeilen 1 und 3 von W schreiben (unten eingekreist, die Stufeneinsen stehen nun also genau auf der Diagonalen); die übrigen Einträge von W sind -1 auf der Diagonalen und 0 sonst:

$$W = (w_1\,|\,w_2\,|\,w_3\,|\,w_4\,|\,w) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Eine Basis von $\operatorname{Ker} A$ ist nun nach Satz 15.32 (a) gegeben durch die oben grau markierten Spalten (w_2, w_4) von W (also die Spalten der Zusatzeinträge -1), und die Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ ist $w + \operatorname{Lin}(w_2, w_4)$ nach Satz 15.32 (b). Wollen wir nur den Kern von A bestimmen, können wir natürlich komplett mit A statt mit $(A \,|\, b)$ rechnen und haben demzufolge sowohl in $(*)$ als auch in W keine separate rechte Spalte.

Auch die Berechnung inverser Matrizen ist mit Zeilenstufenformen einfach:

Satz 15.34 (Inverse Matrix)**.** *Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$. Wir bringen A mit elementaren Zeilenumformungen in reduzierte Zeilenstufenform FA mit $F \in \mathrm{GL}(n, K)$, führen aber alle Umformungen mit der erweiterten Matrix $(A \,|\, E) \in K^{n \times (2n)}$ durch, so dass wir am Ende die Matrix $F(A \,|\, E) = (FA \,|\, FE)$ erhalten.*

Dann ist A genau dann invertierbar, wenn nach der Umformung in der linken Hälfte der erweiterten Matrix die Einheitsmatrix $FA = E$ steht. In diesem Fall steht in der rechten Hälfte die inverse Matrix $FE = F = A^{-1}$.

Beweis. Nach Satz 15.17 ist A genau dann invertierbar, wenn $\operatorname{rk} A = n$ gilt, also FA in reduzierter Zeilenstufenform mit n Stufen ist. Die einzige $n \times n$-Matrix in reduzierter Zeilenstufenform mit n Stufen ist aber die Einheitsmatrix. Also ist A genau dann invertierbar, wenn $FA = E$ gilt, und die inverse Matrix $F = A^{-1}$ steht in diesem Fall in der rechten Hälfte FE der umgeformten erweiterten Matrix. □

Folgerung 15.35. *Jede invertierbare Matrix ist ein Produkt von Elementarmatrizen.*

Beweis. Zu jedem $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ gibt es nach Satz 15.34 ein Produkt $F = F_1 \cdot \cdots \cdot F_k$ von Elementarmatrizen $F_1, \dots, F_k$ mit $F = A^{-1}$. Da die inversen Matrizen von Elementarmatrizen nach Bemerkung 15.24 (a) wieder Elementarmatrizen sind, ist damit aber auch $A = F^{-1} = F_k^{-1} \cdot \cdots \cdot F_1^{-1}$ ein Produkt von Elementarmatrizen. □

Beispiel 15.36. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Wir bringen nun A mit Satz 15.26 in reduzierte Zeilenstufenform, führen aber alle Umformungen mit der 2×4-Matrix $(A \,|\, E_2)$ durch:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z2-3Z1 \to Z2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z1-Z2 \to Z1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Da in der linken Hälfte nun die Einheitsmatrix steht, ist A nach Satz 15.34 invertierbar, und die zu A inverse Matrix ist die rechte Hälfte

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Als letzten Algorithmus wollen wir nun noch untersuchen, welche Schlussfolgerungen wir ziehen können, wenn wir in einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ elementare Spalten- statt Zeilenumformungen durchführen, was nach Bemerkung 15.24 (d) als Multiplikation mit einem Produkt von Elementarmatrizen von rechts geschrieben werden kann. Natürlich entspricht dies auch genau elementaren Zeilenumformungen in der transponierten Matrix A^{T}. Da wir A^{T} nach Satz 15.29 mit elementaren Zeilenumformungen in eine Zeilenstufenform mit $\operatorname{rk}(A^{\mathsf{T}})$ Stufen bringen können, können wir also auch A mit elementaren Spaltenumformungen in eine *Spaltenstufenform* (d. h. eine transponierte Zeilenstufenform) mit $\operatorname{rk}(A^{\mathsf{T}})$ Stufen bringen. Wie wir jetzt zeigen wollen, kann man auch an dieser Spaltenstufenform das Bild von A ablesen, auch wenn sie ganz anders aussieht als die Zeilenstufenform.

Satz 15.37 (Alternative Formel für Bild und Rang einer Matrix)**.** *Es seien $m,n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{m\times n}$. Wir bringen A mit elementaren Spaltenumformungen in Spaltenstufenform*

$$AF = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ * & & & 1 & \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow k_1 \\ \leftarrow k_2 \\ \\ \leftarrow k_r \end{array}$$

mit $F \in \mathrm{GL}(n,K)$, wobei $r = \mathrm{rk}(A^\mathsf{T})$ die Anzahl der Stufen und $k_1 < \cdots < k_r$ die Stufenzeilen von AF sind; die Matrix AF hat also die Form $AF =: (a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_r \,|\, 0 \,|\, \cdots \,|\, 0)$ für gewisse $a_1,\dots,a_r \in K^m$.

Dann ist $(a_1,\dots,a_r)$ eine Basis von $\mathrm{Im}\,A$. Insbesondere gilt damit $\mathrm{rk}\,A = r = \mathrm{rk}(A^\mathsf{T})$.

Beweis. Wir müssen zwei Dinge über die Familie $B := (a_1,\dots,a_r)$ zeigen:

(a) B ist ein Erzeugendensystem von $\mathrm{Im}\,A$: Es gilt

$$\mathrm{Im}(AF) = \{AFx : x \in K^n\} = \{Ay : y \in K^n\} = \mathrm{Im}\,A$$

mit der Substitution $y = Fx$ (bzw. $x = F^{-1}y$). Also wird $\mathrm{Im}\,A = \mathrm{Im}(AF)$ von den Spalten von AF erzeugt, und damit von B.

(b) B ist linear unabhängig: Es seien $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in K$ mit $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r = 0$. Betrachten wir diese Gleichung der Reihe nach in den Koordinaten $k_1,\dots,k_r$, so erhalten wir wegen der Spaltenstufenform von AF daraus $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$. □

Beispiel 15.38. Wir betrachten noch ein letztes Mal die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$$

aus Beispiel 15.27, und bringen sie diesmal mit elementaren Spaltenumformungen in Spaltenstufenform:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-S1 \to S1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[S5-4S1 \to S5]{\substack{S2-2S1 \to S2 \\ S3-2S1 \to S3 \\ S4-3S1 \to S4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{S2 \leftrightarrow S3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[S5-3S2 \to S5]{S4-S2 \to S4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 15.37 ist also

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $\mathrm{Im}\,A$ (die sich von der aus Beispiel 15.30 unterscheidet). Beachte, dass wir diesmal im Gegensatz zu Beispiel 15.30 die Spalten der umgeformten Matrix und nicht die von A nehmen müssen!

Bemerkung 15.39 (Invarianz des Rangs einer Matrix unter Transposition)**.** Als Folgerung aus unseren beiden Algorithmen zur Berechnung des Rangs einer Matrix haben wir in Satz 15.37 gesehen, dass $\mathrm{rk}\,A = \mathrm{rk}(A^\mathsf{T})$ für jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ gilt. Diese wichtige Eigenschaft des Rangs ist ganz und gar nicht aus der Definition $\mathrm{rk}\,A = \dim \mathrm{Im}\,A$ bzw. $\mathrm{rk}(A^\mathsf{T}) = \dim \mathrm{Im}(A^\mathsf{T})$ offensichtlich – in der Tat sind ImA und Im(A^{T}) komplett verschiedene Unterräume, die ja sogar in unterschiedlichen Vektorräumen K^m bzw. K^n liegen. In der Praxis bedeutet sie, dass jede Eigenschaft des Rangs, die für die Spalten einer Matrix gilt, auch für die Zeilen gilt: So ist der Rang z. B. nicht nur wie in Bemerkung 15.12 (a) die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten von A, sondern auch die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilen von A.

34