14. Basen und Dimension

Im letzten Kapitel haben wir in Lemma 13.11 viele Beispiele von Vektorräumen konstruiert, indem wir zu einer (endlichen) Familie B in einem gegebenen Vektorraum den davon erzeugten Unterraum $\operatorname{Lin} B$ gebildet haben. In der Tat haben sehr viele in der Praxis auftretende Vektorräume die Eigenschaft, dass ihre Elemente als Linearkombinationen endlich vieler gegebener Vektoren geschrieben werden können – z. B. alle Unterräume von K^n für beliebige $n \in \mathbb{N}$, wie wir in Bemerkung **??** noch sehen werden. Wir wollen uns daher zur Vereinfachung oft auf solche gemäß der folgenden Definition endlich erzeugten Vektorräume beschränken. Wie man auch ohne diese Bedingung auskommen kann, werden wir kurz am Ende dieses Kapitels in Bemerkung **??** diskutieren.

Definition 14.1 (Erzeugendensysteme und endlich erzeugte Vektorräume)**.** Es sei V ein Vektorraum.

(a) Eine (endliche) Familie $B = (x_1, \dots, x_n)$ von Vektoren in V heißt ein **Erzeugendensystem** von V, wenn $\operatorname{Lin} B = V$ gilt, d. h. wenn es zu jedem $x \in V$ Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ gibt mit $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$.

(b) Der Vektorraum V heißt **endlich erzeugt**, wenn er ein solches endliches Erzeugendensystem besitzt.

Beispiel 14.2.

(a) Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$ bilden die sogenannten **Einheitsvektoren**

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \in K^n$$

ein Erzeugendensystem von K^n, denn jedes $x \in K^n$ mit Komponenten $x_1, \dots, x_n \in K$ hat die Form

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n.$$

Insbesondere ist K^n damit ein endlich erzeugter Vektorraum.

(b) Für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ ist auch die Familie

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

ein Erzeugendensystem: Um dies zu zeigen, müssen wir zu jedem $x \in \mathbb{R}^2$ mit Komponenten x_1 und x_2 Skalare $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ finden mit

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rl} & x_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \text{und} & x_2 = \lambda_1 - \lambda_2. \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich aber leicht nach λ_1 und λ_2 auflösen; wir erhalten

$$\lambda_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}, \quad \text{also} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1 + x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{x_1 - x_2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Familie $B = (x^0, \dots, x^n)$ aller Potenzfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^i$ für $i = 0, \dots, n$ (die wir hier kurz als x^i schreiben) ein Erzeugendensystem des Vektorraums $\operatorname{Pol}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller reellen Polynome vom Grad höchstens n aus Beispiel 13.12 (c), denn jedes solche Polynom ist nach Definition eine Linearkombination dieser Potenzfunktionen.

Insbesondere ist $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R},\mathbb{R})$ also endlich erzeugt. Der Vektorraum $\mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aller reellen Polynome ohne Gradbeschränkung ist dagegen nicht endlich erzeugt: In einer (endlichen) Familie B von Polynomen in $\mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ gibt es nämlich zwangsläufig einen größten auftretenden Grad; Polynome in $\mathrm{Pol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ von höherem Grad können dann also nicht in $\mathrm{Lin}\,B$ liegen.

(d) Jedes Erzeugendensystem eines Vektorraums V bleibt natürlich ein Erzeugendensystem von V, wenn man beliebige Vektoren von V hinzufügt. So ist z. B. nicht nur wie in (a) die Familie der beiden Einheitsvektoren ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$, sondern auch die Familie

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Diese Erweiterungsmöglichkeit mit beliebigen Vektoren kann Erzeugendensysteme natürlich unnötig groß machen. Wir sollten daher vor allem nach Erzeugendensystemen suchen, die keine überflüssigen Vektoren mehr beinhalten. In diesem Fall kann man dann anschaulich erwarten, dass die Anzahl der Vektoren in einem Erzeugendensystem als „Dimension“ des Vektorraums interpretiert werden kann – so wie in Beispiel 13.12 (a) ein einzelner Vektor eine (eindimensionale) Gerade und in Bemerkung 13.6 (c) zwei Vektoren eine (zweidimensionale) Ebene aufgespannt haben. Das Ziel dieses Kapitels ist es, diese Idee genau zu untersuchen und damit insbesondere auch den sehr wichtigen Dimensionsbegriff mathematisch exakt einzuführen.

14.A Lineare Unabhängigkeit und Basen

In Beispiel 14.2 (d) haben wir schon einen Fall eines Erzeugendensystems B mit überflüssigen Vektoren gesehen, nämlich

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad \text{für den Vektorraum} \quad V = \mathbb{R}^2.$$

Dass hier gar nicht alle drei Vektoren von B benötigt werden, um V zu erzeugen, liegt einfach daran, dass sich einer von ihnen schon als Linearkombination der beiden anderen darstellen lässt: Es ist z. B.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so dass wir diesen Vektor im Erzeugendensystem nicht benötigen. Alternativ könnten wir diese Gleichung auch nach einem der anderen Vektoren auflösen und so sehen, dass man stattdessen auch einen der anderen beiden Vektoren aus B weglassen könnte. Um hier keine Wahl treffen zu müssen, nach welchem Vektor aufgelöst werden soll, schreibt man die obige Gleichung aber in der Regel als

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

also als eine Linearkombination des Nullvektors aus den gegebenen Vektoren. Um Erzeugendensysteme ohne überflüssige Vektoren zu finden, sollten wir also fordern, dass sie keine solchen Linearkombinationen des Nullvektors zulassen. Solche Erzeugendensysteme bezeichnet man als *Basen*:

Definition 14.3 (Basen)**.** Es sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Familie von Vektoren in einem Vektorraum V.

(a) Die Familie B heißt **linear abhängig**, wenn es eine Linearkombination $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ des Nullvektors gibt, in der mindestens ein λ_i ungleich 0 ist (man nennt dies auch eine *nichttriviale Linearkombination des Nullvektors*).

Ist das Gegenteil der Fall, folgt aus einer Linearkombination $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$ des Nullvektors mit zunächst beliebigen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ also bereits, dass $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ gelten muss, so heißt B **linear unabhängig**.

(b) Die Familie B heißt eine **Basis** von V, wenn B ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V ist.

Bemerkung 14.4. Es sei $B = (x_1, \dots, x_n)$ eine Familie von Vektoren in einem Vektorraum V.

(a) Enthält B den Nullvektor, d. h. gilt $x_i = 0$ für ein i, so ist B in jedem Fall linear abhängig, denn dann ist ja $1 \cdot x_i = 0$ eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors.

(b) Ebenso ist B immer linear abhängig, wenn die Familie einen Vektor mehrfach enthält, also wenn $x_i = x_j$ für gewisse $i \neq j$ gilt, da dann $1 \cdot x_i - 1 \cdot x_j = 0$ eine nicht-triviale Linearkombination des Nullvektors ist.

Beispiel 14.5.

(a) Das Erzeugendensystem $B = (e_1, \dots, e_n)$ der Einheitsvektoren von K^n aus Beispiel 14.2 (a) ist linear unabhängig, denn sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$0 = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix},$$

so folgt daraus natürlich sofort $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Damit ist B also eine Basis von K^n; man nennt sie die **Standardbasis** von K^n.

Als Spezialfall davon für $n = 0$ ist die leere Familie eine Basis des Nullvektorraums (siehe Definition 13.5 (b)).

(b) Auch das Erzeugendensystem

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{R}^2$ aus Beispiel 14.2 (b) ist linear unabhängig und damit eine Basis von $\mathbb{R}^2$: Sind nämlich $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rl} & \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \text{und} & \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \end{array}$$

so folgt aus diesem Gleichungssystem natürlich sofort $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Neben der Standardbasis aus (a) haben wir damit also noch eine weitere Basis von $\mathbb{R}^2$ gefunden und sehen damit schon, dass Basen von Vektorräumen nicht eindeutig bestimmt sind. Allerdings werden wir in Folgerung **??** noch zeigen, dass alle Basen eines endlich erzeugten Vektorraums zumindest gleich viele Elemente haben. Dass unsere gerade gefundene Basis B genau wie die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ aus zwei Vektoren besteht, ist also kein Zufall.

(c) Ebenfalls in $\mathbb{R}^2$ ist wie in der Einleitung zu diesem Abschnitt die Familie

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad \text{wegen} \quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear abhängig, und damit auch keine Basis von $\mathbb{R}^2$.

Beachte aber, dass mit einer Rechnung analog zu (b) je zwei der drei Vektoren dieser Familie B stets linear unabhängig sind. Die lineare Unabhängigkeit einer Familie kann also *nicht* überprüft werden, indem man immer nur zwei ihrer Vektoren miteinander vergleicht!

(d) Wir betrachten noch einmal den Vektorraum $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ aller reellen Polynome vom Grad höchstens n mit dem Erzeugendensystem $B = (x^0, \dots, x^n)$ der Potenzfunktionen aus Beispiel 14.2 (c). Da eine nicht-triviale Linearkombination dieser Potenzfunktionen nach dem Koeffizientenvergleich aus Lemma 3.22 nie die Nullfunktion sein kann, ist dieses Erzeugendensystem auch linear unabhängig, und damit eine Basis von $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Aufgabe 14.6. Untersuche die Familie B in den folgenden Fällen auf lineare Unabhängigkeit im Vektorraum V:

(a) $V = \mathbb{R}^3$; $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$.

(b) V ein beliebiger Vektorraum; $B = (x+y, x+z, y+z)$ für drei linear unabhängige Vektoren x, y, z.

(c) $V = \text{Abb}(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \mathbb{R})$; $B = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ mit

$$\varphi_1 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\, x \mapsto x, \quad \varphi_2 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{1}{x}, \quad \varphi_3 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Aufgabe 14.7. Es seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $(x_1, \dots, x_n)$ eine Basis eines Vektorraums V. Wir setzen

$$y_k := \sum_{i=1}^{k} x_i \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n.$$

Zeige, dass die Familie $(y_1, \dots, y_n)$ dann ebenfalls eine Basis von V ist.

Oft ist die folgende äquivalente Umformulierung der Basiseigenschaft nützlich:

Lemma und Definition 14.8 (Alternatives Kriterium für Basen)**.** *Eine Familie $B = (x_1, \dots, x_n)$ von Vektoren in einem Vektorraum V ist genau dann eine Basis von V, wenn es zu jedem Vektor $x \in V$ eindeutig bestimmte Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ gibt mit $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$.*

*In diesem Fall nennt man $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die **Koordinaten** von x bezüglich B.*

Beweis. Wir zeigen beide Richtungen der behaupteten Äquivalenz:

„$\Rightarrow$“: Es sei B eine Basis von V. Da B dann ein Erzeugendensystem von V ist, gibt es zu jedem $x \in V$ Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ mit $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$.

Diese Koordinaten sind auch eindeutig bestimmt: Sind nämlich $\mu_1, \dots, \mu_n$ weitere Skalare mit $x = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n$, so gilt

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = \mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n \quad \Rightarrow \quad (\lambda_1 - \mu_1) x_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) x_n = 0,$$

und damit folgt wegen der linearen Unabhängigkeit von B sofort $\lambda_i - \mu_i = 0$, also $\lambda_i = \mu_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.

„$\Leftarrow$“: Ist jeder Vektor in V eine Linearkombination der Vektoren aus B, so bedeutet dies natürlich $\text{Lin}\, B = V$. Außerdem ist $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ nach Voraussetzung die einzige Möglichkeit, den Nullvektor als Linearkombination $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ zu schreiben. Damit ist B auch linear unabhängig. □

Beispiel 14.9.

(a) Die Komponenten eines Vektors $x \in K^n$ sind genau seine Koordinaten bezüglich der Standardbasis aus Beispiel 14.5 (a). Auch ohne Erwähnung einer Basis werden wir sie daher in Zukunft oft einfach seine Koordinaten nennen.

(b) Analog sind die Koeffizienten eines Polynoms in $\text{Pol}_n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gerade seine Koordinaten bezüglich der Basis $(x^0, \dots, x^n)$ aus Beispiel 14.5 (d).

Bemerkung 14.10.

(a) Lemma 14.8 besagt anschaulich, dass wir einen Vektor in einem Vektorraum V bei gegebener Basis B genauso gut auch durch den Vektor in K^n seiner Koordinaten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ bezüglich B beschreiben können. Wir werden dies in den Abschnitten **??** und **??** noch genau untersuchen.

(b) Um einen Vektor wie in (a) durch seine Koordinaten bezüglich einer Basis B beschreiben zu können, ist es wichtig, dass wir Basen als *Familien* und nicht als *Mengen* definiert haben, da die Elemente einer Menge keine vorgegebene Reihenfolge haben und wir somit bei einer Menge B keine Möglichkeit hätten, die Koordinaten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ eindeutig den Vektoren in B
30 zuzuordnen.