Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 9

Abgabe: Montag, 15. Januar bis 16:00 Uhr

(1) Untersuche die folgenden Familien B auf lineare Unabhängigkeit im $\mathbb{R}$-Vektorraum V:

(a) $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 8 & a \end{pmatrix} \right)$ in $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ in Abhängigkeit von einem gegebenen $a \in \mathbb{R}$;

(b) $B = (f, f')$ in $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ in Abhängigkeit von einem gegebenen Polynom f (wobei f' wie üblich die Ableitung von f bezeichnet);

(c) $B = (g_a)_{a\in\mathbb{R}}$ in $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit

$$g_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \le a, \\ x-a & \text{für } x \ge a. \end{cases}$$

(2) Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich erzeugten Vektorräumen. Wir wählen eine beliebige Basis $(x_1,\dots,x_n)$ von $\mathrm{Ker}\, f$ und ergänzen sie zu einer Basis $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_k)$ von V (wir werden in der Vorlesung noch sehen, dass eine solche Basisergänzung immer möglich ist).

Zeige, dass $(f(y_1),\dots,f(y_k))$ dann eine Basis von $\mathrm{Im}\, f$ ist.

Insbesondere erhalten wir auf diese Art also die Dimensionsformel $\dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\, f = \dim V$.

Das Team der GdM1:Lineare Algebra
wünscht euch frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch
ins neue Jahr!