Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 8

Abgabe: Montag, 8. Januar bis 16:00 Uhr

(1) (a) Es seien $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$ und $y_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, y_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, y_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$.

Man zeige:

- Es gibt einen Morphismus $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x_i) = e_i$ für alle $i \in \{1,2,3\}$.
- Es gibt einen Morphismus $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x_i) = y_i$ für alle $i \in \{1,2,3\}$.

(Die Morphismen müssen nicht explizit angegeben werden.)

(b) Es sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Ferner sei U ein Unterraum von V mit $U \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$ und $U + \operatorname{Ker} f = V$.
Zeige, dass die Abbildung $f|_U\colon U \to \operatorname{Im} f$ bijektiv ist.

(2) Für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $V \leq \operatorname{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der Unterraum aller Polynomfunktionen vom Grad kleiner als n. Zeige, dass die Abbildung

$$f\colon V \to \mathbb{R}^n,\ \varphi \mapsto (\varphi(1),\dots,\varphi(n))$$

linear ist, und bestimme Kern und Bild von f.