Andreas Gathmann und Jonas Frank Wintersemester 2023/24

Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 7

Abgabe: Montag, 18. Dezember bis 16:00 Uhr

(1) (a) Welche der folgenden Teilmengen sind Unterräume von $\mathbb{R}^3$?

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a-5 \\ b-5 \\ a-b \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a-5 \\ b-5 \\ a-b \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}.$$

(b) Untersuche in den Fällen $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{Z}_2$, für welche $a,b,c \in K$ die Abbildung

$$f \colon K^2 \to K^2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax_2^2 + bx_2 \\ cx_1x_2 \end{pmatrix}$$

linear ist.

(2) In $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ seien

$$\begin{aligned} & U_1 = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \\ \text{und} \quad & U_2 = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

die Teilmengen aller sogenannten geraden bzw. ungeraden Funktionen. Man zeige:

(a) U_1 und U_2 sind Unterräume von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

(b) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und $U_1 + U_2 = \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.