Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 6

Abgabe: Montag, 11. Dezember bis 16:00 Uhr

(1) In der Vorlesung haben wir gesehen, dass wir den Kern einer Matrix $A \in K^{m\times n}$ vom Rang r als $\mathrm{Lin}(v_1,\dots,v_{n-r})$ für linear unabhängige Vektoren $v_1,\dots,v_{n-r} \in K^n$ schreiben können, also als $\mathrm{Im}\,B$ für eine Matrix $B = (v_1 \,|\, \cdots \,|\, v_{n-r}) \in K^{n\times(n-r)}$ vom Rang $n-r$. Wir wollen nun die umgekehrte Richtung untersuchen, also ob wir das Bild einer Matrix auch immer als Kern schreiben können.

(a) Es seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^4$.

Bestimme eine reelle Matrix A mit $\mathrm{Ker}\,A = \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$.

(b) Man zeige für alle $m,n,r \in \mathbb{N}$: Zu jeder Matrix $B \in K^{n\times m}$ vom Rang r gibt es eine Matrix $A \in K^{(n-r)\times n}$ vom Rang $n-r$ mit $\mathrm{Im}\,B = \mathrm{Ker}\,A$.

(2) Es seien U_1 und U_2 Unterräume eines K-Vektorraums V. Zeige, dass $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Unterraum von V ist, wenn $U_1 \subset U_2$ oder $U_2 \subset U_1$.