Andreas Gathmann und Jonas Frank Wintersemester 2023/24

Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 5

Abgabe: Montag, 4. Dezember bis 16:00 Uhr

(1) (a) Für ein gegebenes $\lambda \in \mathbb{R}$ sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Für welche λ ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar? Bestimme in diesen Fällen auch die Lösungsmenge $L(A,b)$.

(b) Beweise für jede quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$

$$A^2 = A \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker}(E-A) = \operatorname{Im} A.$$

(2) Es seien $m,n \in \mathbb{N}_{>0}$.

(a) Es seien $A \in K^{m\times m}$ und $x \in K^m$ mit $A^n x \neq 0$ und $A^{n+1}x = 0$.
Zeige, dass die Vektoren $x, Ax, A^2x, \dots, A^n x$ dann linear unabhängig sind.

(b) Für gegebene Skalare $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$ und linear unabhängige Vektoren $a_1,\dots,a_n \in K^m$ setzen wir $a := \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$.
Zeige, dass $a_1 - a, \dots, a_n - a$ genau dann linear abhängig sind, wenn $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ gilt.