Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 4

Abgabe: Montag, 27. November bis 16:00 Uhr

(1) (a) Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Zeige, dass A invertierbar ist, und berechne die inverse Matrix A^{-1}.

(b) Es seien $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Bestimme den Rang der Matrix $(a_i + a_j)_{i,j} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in Abhängigkeit von $a_1, \dots, a_n$.

(2) (a) Für zwei Matrizen $A_1 \in K^{m_1\times n}$ und $A_2 \in K^{m_2\times n}$ mit gleicher Anzahl Spalten betrachten wir die daraus zusammengesetzte Matrix $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$ mit $m = m_1 + m_2$. Zeige die Ungleichung

$$\operatorname{rk} A_1 \leq \operatorname{rk} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \leq \operatorname{rk} A_1 + \operatorname{rk} A_2,$$

und gib ein Beispiel an, in dem an beiden Stellen die strikte Ungleichung „$<$“ gilt.

(b) Zeige für alle $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{n\times p}$ die Ungleichung

$$\operatorname{rk}(AB) \geq \operatorname{rk} A + \operatorname{rk} B - n.$$

(Hinweis: Untersuche die Aussage zunächst in dem Fall, wenn A in Normalform bezüglich Matrixäquivalenz ist.)