Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 3

Abgabe: Montag, 20. November bis 16:00 Uhr

Ihr dürft bereits verwenden, dass die reduzierte Zeilenstufenform einer Matrix A eindeutig ist und jede beliebige Zeilenstufenform von A dieselbe Anzahl Stufen hat (dies wird am Anfang der Vorlesung vom 17. November gezeigt). Diese Anzahl Stufen nennt man den Rang von A.

(1) Es sei $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 6}$.

(a) Berechne die reduzierte Zeilenstufenform von B. (Hinweis zum Erkennen von Rechenfehlern: Alle Einträge der reduzierten Zeilenstufenform liegen in der Menge $\{0,1,2,3\}$.)

(b) Es sei $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{m\times n}$ eine Matrix in reduzierter Zeilenstufenform mit den Stufenspalten $j_1,\dots,j_r \in \{1,\dots,n\}$. Für eine fest gewählte Nichtstufenspalte $k \in \{1,\dots,n\}\backslash\{j_1,\dots,j_r\}$ definieren wir nun den Vektor $x = (x_j)_j \in K^n$ durch

$$x_j = \begin{cases} a_{l,k} & \text{falls } j = j_l \text{ für ein } l \in \{1,\dots,r\}, \\ -1 & \text{falls } j = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass dann $Ax = 0$ gilt.

(c) Bestimme zwei Vektoren $x, x' \in \mathbb{R}^6$ mit $Bx = Bx' = 0$, die keine skalaren Vielfachen voneinander sind.

(2) Es sei $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix vom Rang r.
Beweise, dass es dann Matrizen $B \in K^{m\times r}$ und $C \in K^{r\times n}$ vom Rang r gibt mit $A = BC$.
(Hinweis: Zeige die Aussage zunächst für den Fall, dass A in Zeilenstufenform ist.)