Andreas Gathmann und Jonas Frank Wintersemester 2023/24

Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 2

Abgabe: Montag, 13. November bis 16:00 Uhr

(1) Für ein gegebenes $a \in \mathbb{R}$ sei $A = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Für $a \neq 0$ berechne man A^n für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.
(Hinweis: Bestimme A^n für kleine Werte von n, stelle damit eine Vermutung für die allgemeine Form von A^n auf, und beweise diese Vermutung dann mit vollständiger Induktion.)

(b) Für welche a ist die Matrix A invertierbar? Bestimme in diesen Fällen auch eine inverse Matrix zu A.

(2) Zu einer Menge M mit $|M| \geq 2$ sei

$$V = \{f : f \text{ ist eine Abbildung von } M \text{ nach } \mathbb{R}\}$$

die Menge aller reellwertigen Funktionen auf M. Für $f, g \in V$ definieren wir die Addition $f+g$ und Multiplikation $f \cdot g$ dieser Funktionen punktweise durch

$$f+g\colon M \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)+g(x) \qquad \text{und} \qquad f \cdot g\colon M \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)\cdot g(x).$$

(a) Zeige, dass V mit dieser Addition eine abelsche Gruppe ist.

(b) Ist V mit dieser Addition und Multiplikation ein Körper?