Andreas Gathmann und Jonas Frank Wintersemester 2023/24

Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 14

(keine Abgabe)

(1) (a) Berechne $\det(A^5)$ und $\det(5A)$ für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $a_1, \dots, a_n \in K\backslash\{0\}$ zeige man

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = -\left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right).$$

(2) Es seien $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix, die eine Blockgestalt der Form

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

hat, wobei $B \in K^{m\times m}$ und $C \in K^{(n-m)\times(n-m)}$ selbst quadratische Matrizen sind. Zeige, dass dann $\det A = \det B \cdot \det C$ gilt.

(Hinweis: Es hilft, zunächst die Fälle zu betrachten, in denen eine der Matrizen B und C nicht invertierbar oder die Einheitsmatrix ist.)