Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 13

(keine Abgabe)

(1) In $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Untervektorräume

$$U_1 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad U_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 : 2x_1 - x_3 - 3x_4 = x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0\},$$

wobei $x_1, \dots, x_4$ wie üblich die Koordinaten von $x \in \mathbb{R}^4$ sind.
Berechne Basen von $U_1/(U_1 \cap U_2)$ und $(U_1 + U_2)/U_2$.

(2) (a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei V_n der Vektorraum der reellen Polynomfunktionen vom Grad höchstens n. Zeige, dass die Abbildung $f\colon V_{n+1}/V_1 \to \mathbb{R}$, $\overline{\varphi} \mapsto \varphi''(1)$ wohldefiniert ist, und bestimme die Dimension von $\operatorname{Ker} f$.

(b) Es seien U ein Unterraum eines K-Vektorraums V und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass

$$g\colon V/U \to V/U,\ \overline{x} \mapsto \overline{f(x)}$$

genau dann eine lineare Abbildung definiert, wenn $f(U) \subset U$.