Andreas Gathmann und Jonas Frank Wintersemester 2023/24

Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 12

Abgabe: Montag, 5. Februar bis 16:00 Uhr

Da dies das letzte abzugebene Übungsblatt ist, könnt ihr ausnahmsweise schon die Dimensionsformel für Durchschnitte und Summen verwenden, die erst am Anfang der nächsten Vorlesungsstunde am 2. Februar gezeigt wird: Sind U_1 und U_2 zwei Unterräume eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, so gilt $\dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

(1) (a) Es seien V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \leq V$ mit $\dim V = 6$, $\dim U_1 = 5$ und $\dim U_2 = 3$. Welche Dimension kann $U_1 \cap U_2$ haben? Gib für jede solche Möglichkeit ein konkretes Beispiel für U_1, U_2 und V an.

(b) Es seien $U_1, \dots, U_k$ Unterräume eines n-dimensionalen K-Vektorraums V. Zeige, dass

$$\dim(U_1 \cap \cdots \cap U_k) \geq \sum_{i=1}^{k} \dim U_i - (k-1)\,n.$$

(2) (a) Zeige, dass

$$f\colon \mathbb{R}^2/\operatorname{Lin}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to \mathbb{R}^2/\operatorname{Lin}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \overline{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \mapsto \overline{\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

ein wohldefinierter Isomorphismus ist.

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/U,\ x \mapsto \bar{x}$ mit $U = \operatorname{Lin}(e_1 - 2e_2 + e_3)$. Bestimme eine Basis B von $\mathbb{R}^3/U$ sowie die zugehörige Abbildungsmatrix $A_f^{E,B}$ für die Standardbasis E von $\mathbb{R}^3$.

(c) Es seien $k, l \in \mathbb{N}_{>0}$ sowie $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l$ Vektoren in einem Vektorraum V. Untersuche, welche der Implikationen „$\Rightarrow$" und „$\Leftarrow$" im Folgenden für das Symbol „$\square$" eingesetzt werden können, damit allgemein wahre Aussagen entstehen:

$$(\overline{v_1}, \dots, \overline{v_k}) \text{ ist linear abhängig in } V/\operatorname{Lin}(w_1, \dots, w_l)$$
$$\square\ (v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l) \text{ ist linear abhängig in } V.$$