Andreas Gathmann und Jonas Frank Wintersemester 2023/24

Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 11

Abgabe: Montag, 29. Januar bis 16:00 Uhr

(1) Es seien $U_1, \dots, U_n$ Unterräume eines K-Vektorraums V mit $V = U_1 + \cdots + U_n$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$.

(b) Sind $u_i \in U_i$ für $i = 1, \dots, n$ so dass $u_1 + \cdots + u_n = 0$, so gilt bereits $u_1 = \cdots = u_n = 0$.

(c) $U_i \cap (U_1 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_n) = \{0\}$ für alle $i = 1, \dots, n$.

(d) $U_i \cap (U_{i+1} + \cdots + U_n) = \{0\}$ für alle $i = 1, \dots, n-1$.

(2) Die *Spur* einer quadratischen Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in K^{n \times n}$ ist definiert als

$$\operatorname{Spur} A := \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \quad \in K,$$

also als die Summe ihrer Diagonaleinträge. Man zeige:

(a) Für alle $A, A' \in K^{n \times n}$ gilt $\operatorname{Spur}(AA') = \operatorname{Spur}(A'A)$.

(b) Sind V ein endlich erzeugter Vektorraum und $f \colon V \to V$ eine lineare Abbildung, so ist $\operatorname{Spur} A_f^{B,B}$ für jede Basis B von V die gleiche Zahl. Wir bezeichnen sie daher auch mit $\operatorname{Spur} f$.

(c) Ist $f \colon V \to V$ wie in (b) und $U := \operatorname{Im} f$, so ist $\operatorname{Spur}(f|_U) = \operatorname{Spur} f$, wobei $f|_U \colon U \to U,\ x \mapsto f(x)$ die Einschränkung von f auf U im Start- und Zielbereich bezeichnet.