Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 10

Abgabe: Montag, 22. Januar bis 16:00 Uhr

Wenn ihr zu Rechnungen mit Abbildungsmatrizen zunächst ein Beispiel sehen möchtet, könnt ihr euch schon einmal Beispiel 16.25 in Version A des Skripts anschauen, das unmittelbar auf die Vorlesung vom 12. Januar folgt.

(1) (a) Es sei V der Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens 2 mit Basis $B = (1, x+1, x^2+x)$. Ferner seien $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ und $f\colon V \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $A_f^{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechne $f(x^2-5)$.

(b) Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $B = (P, Q, PQ, QP)$ eine Basis von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ (das braucht ihr nicht zu beweisen). Bestimme die Abbildungsmatrix $A_f^{B,B}$ und die dazu inverse Matrix $\left(A_f^{B,B}\right)^{-1}$ für die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$, $M \mapsto M^{\mathsf{T}}$.

(2) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die rekursiv definierte Folge natürlicher Zahlen, die durch $a_0 = 42$, $a_1 = 21$ und die Rekursionsgleichung

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \qquad (*)$$

gegeben ist, also die Folge $(42, 21, 63, 84, 147, 231, \dots)$. Wir wollen in dieser Aufgabe eine explizite Formel für das n-te Folgenglied a_n herleiten.

Es sei dazu $V \le \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der Unterraum aller reellen Zahlenfolgen, die die Rekursionsgleichung $(*)$ erfüllen (ihr braucht nicht nachzuweisen, dass dies wirklich ein Unterraum ist, solltet euch aber trotzdem kurz überlegen, warum das so ist).

(a) Für welche $q \in \mathbb{R}$ liegt die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, q, q^2, q^3, \dots)$ in V?

(b) Zeige, dass $\dim V = 2$ gilt, und bestimme eine Basis von V.

(c) Berechne mit (b) eine explizite nicht-rekursive Formel für die Glieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.