Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 7

Lösungshinweise

(1) Die Unterräume U_1 und U_2 von $\mathbb{R}^4$ seien gegeben durch

$$U_1 = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\-5\\-4\end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad U_2 = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\0\\5\end{pmatrix}\right).$$

Berechne eine Basis von $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.

Lösung: Basis von $U_1 \cap U_2$: Es ist $u \in U_1 \cap U_2$ genau dann wenn $u \in U_1$ und $u \in U_2$. Die Vektoren, die U_1 bzw. U_2 erzeugen, sind jeweils linear unabhängig und damit eine Basis von U_1 bzw. U_2. Es folgt

$$u \in U_1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : u = \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}-2\\1\\-5\\-4\end{pmatrix},$$

$$u \in U_2 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \gamma, \delta \in \mathbb{R} : u = \gamma \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-3\end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix}3\\-1\\0\\5\end{pmatrix},$$

gesucht sind also $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}-2\\1\\-5\\-4\end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-3\end{pmatrix} - \delta \begin{pmatrix}3\\-1\\0\\5\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -5 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3 & -5\end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{pmatrix},$$

das heißt, der Kern der Matrix A. Wir bringen A auf reduzierte Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -5 & 1 & 0\\ 1 & -4 & 3 & -5\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

der Kern von A wird also erzeugt von $\begin{pmatrix}3\\1\\2\\1\end{pmatrix}$. Es folgt $u \in U_1 \cap U_2$ genau dann, wenn

$$u = 3\lambda \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-2\\1\\-5\\-4\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\-2\\-1\end{pmatrix},$$

damit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

Basis von $U_1 + U_2$: Wir schreiben die vier gegebenen Vektoren, die $U_1 + U_2$ erzeugen, als Zeilen in eine Matrix und bringen diese mit Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -5 & -4 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ eine Basis von $U_1 + U_2$.

Alternativlösung für $U_1 + U_2$: Nach der Dimensionsformel ist

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Außerdem haben wir bei der Berechnung des Schnitts gesehen, dass $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ eine Linearkombination der anderen drei gegebenen Vektoren ist. Diese anderen drei Vektoren $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ sind damit ebenfalls eine Basis von $U_1 + U_2$.

(2) (a) Berechne die Determinante sowie die inverse Matrix von $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3\times 3, \mathbb{R})$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $a_1, \dots, a_n \in K\backslash\{0\}$ zeige man

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = -\left(\prod_{i=1}^n a_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right).$$

Lösung: (a) Wir entwickeln die Determinante nach der ersten Zeile:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} + 2\det\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = -8-3+2(2+4) = -11+12 = 1.$$

Die inverse Matrix berechnen wir mit dem in der Vorlesung vorgestellten Verfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z3-4Z1\to Z3]{Z2-2Z1\to Z2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-Z2\to Z2]{Z3+Z2\to Z3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-Z3\to Z3]{Z2+Z3\to Z2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z1-2Z3\to Z1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Damit ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Determinante ist in jeder Zeile linear, also gilt

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = \left(\prod_{i=1}^n a_i\right) \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{a_n} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter ändert das Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen die Determinante nicht, also ist

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{a_n} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\sum\limits_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{a_n} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entwicklung nach der ersten Zeile liefert nun

$$\det \begin{pmatrix} -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2} & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{1}{a_n} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right) \cdot \det E_n = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}.$$

Insgesamt gilt also

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} = -\left(\prod_{i=1}^{n} a_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \right).$$

(3) Es seien $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ eine quadratische Matrix, die eine Blockgestalt der Form

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

hat, wobei $B \in \mathrm{Mat}(m \times m, K)$ und $C \in \mathrm{Mat}((n-m) \times (n-m), K)$ selbst quadratische Matrizen sind. Zeige, dass dann $\det A = \det B \cdot \det C$ gilt.

Lösung: Wir zeigen die Aussage in vier Schritten:

- Schritt 1: Ist $\det B = 0$, dann ist B nicht invertierbar. Also gibt es $v \in \mathbb{R}^m$, $v \neq 0$, mit $Bv = 0$. Wählen wir $w = (v_1, \ldots, v_m, 0, \ldots, 0)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^n$, so gilt $w \neq 0$ und $Aw = \begin{pmatrix} Bv \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. Also ist A auch nicht invertierbar, und es gilt $\det A = \det B \cdot \det C = 0$.
- Schritt 2: Ist $B = E_m$, so zeigen wir $\det A = \det C = \det E_m \cdot \det C$ mit Induktion über m: Für $m = 0$ gilt die Aussage wegen $\det E_0 = 1$. Für den Induktionsschritt benutzen wir

  $$E_{m+1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & E_m \end{array}\right)$$

  und entwickeln die Determinante von

  $$A = \left(\begin{array}{c|c} E_{m+1} & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & * \\ \hline 0 & E_m & * \\ \hline 0 & 0 & C \end{array}\right)$$

  nach der ersten Spalte. Dann gilt

  $$\det A = 1 \cdot \det \left(\begin{array}{c|c} E_m & * \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \det C = \det B \cdot \det C$$

  nach Induktionsvoraussetzung.
- Schritt 3: Für $C = E_{n-m}$ gilt analog zu Schritt 2 ebenfalls $\det A = \det B \cdot \det C$.
- Schritt 4: Nun seien B, C beliebig mit $\det B \neq 0$. Dann ist B invertierbar, es existiert also eine inverse Matrix B^{-1}. Weiter sei $D \in \mathrm{Mat}(m \times (n-m), K)$ so, dass $A = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$ gilt. Dann folgt

  $$A = \left(\begin{array}{c|c} B & D \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & E_{(n-m)} \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} E_m & B^{-1}D \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

  und somit

  $$\det A = \det \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & E_{(n-m)} \end{array}\right) \cdot \det \left(\begin{array}{c|c} E_m & B^{-1}D \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \det B \cdot \det C$$

  nach dem Produktsatz und den Schritten 2 und 3.