Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 6

Abgabe: Mittwoch, 20. Juli bis 12:00

(1) (a) Berechne mit dem Gauß-Verfahren Basen von $\operatorname{Ker} A$ und $\operatorname{Im} A$ für die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Berechne den Rang der reellen Matrix $\begin{pmatrix} 0 & b & b \\ a & 0 & b \\ a & a & 0 \end{pmatrix}$ in Abhängigkeit von $a, b \in \mathbb{R} \in \backslash\{0\}$.

(2) Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Für die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $x \mapsto Ax$ bestimme man Basen B von $\mathbb{R}^5$ und C von $\mathbb{R}^4$, so dass die Abbildungsmatrix $A_f^{B,C}$ in Normalform ist.

(b) Bestimme $S \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$ und $T \in \mathrm{GL}(5,\mathbb{R})$ so, dass SAT in Normalform ist.

(c) Für $n \in \mathbb{N}$ sei V_n der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad höchstens n. Weiterhin sei $f\colon V_4 \to V_3$, $\varphi \mapsto \varphi'$, wobei φ' die Ableitung von φ bezeichnet.
Gibt es Basen B von V_4 und C von V_3, so dass $A_f^{B,C} = A$?

(3) Es seien $B = (x_1, \dots, x_n)$ und $C = (y_1, \dots, y_n)$ zwei Basen von K^n. Wir bilden daraus die Matrix $A = (\, y_1 \mid \cdots \mid y_n \mid x_1 \mid \cdots \mid x_n \,) \in \mathrm{Mat}(n \times 2n, K)$. Nun bringen wir die linke Hälfte dieser Matrix mit elementaren Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform, führen die Umformungen dabei aber mit allen Spalten der Matrix durch.

Zeige, dass dann in der rechten Hälfte der Matrix genau die Basiswechselmatrix $A^{B,C}$ steht.

(4) Es seien $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$. Zeige, dass die Matrix

$$(a_j^i)_{0 \le i,j \le n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}$$

genau dann invertierbar ist, wenn alle $a_0, \dots, a_{n-1}$ verschieden sind.