Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 5

Abgabe: Mittwoch, 6. Juli bis 12:00

(1) Für ein gegebenes $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ sei

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

(a) Berechne A^n für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

(b) Bestimme die Dimension und eine Basis des Quotientenraums $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) / \mathrm{Lin}((A^n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}})$.

(2) (a) Es sei V der Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens 2 mit Basis $B = (1, x+1, x^2+x)$. Ferner seien $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ und $f\colon V \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit $A_f^{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechne $f(x^2 - 5)$.

(b) Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/U,\ x \mapsto \overline{x}$ mit $U = \mathrm{Lin}(e_1 - 2e_2 + e_3)$. Bestimme eine Basis B von $\mathbb{R}^3/U$ sowie die zugehörige Abbildungsmatrix $A_f^{E,B}$ für die Standardbasis E von $\mathbb{R}^3$.

(c) Für $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist $B = (P, Q, PQ, QP)$ eine Basis von $\mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R})$ (das braucht ihr nicht zu beweisen). Bestimme die Abbildungsmatrix $A_f^{B,B}$ und die dazu inverse Matrix $\left(A_f^{B,B}\right)^{-1}$ für die lineare Abbildung $f\colon\ \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{R}),\ M \mapsto M^{\mathsf{T}}$.

(3) Die *Spur* einer quadratischen Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ ist definiert als

$$\mathrm{Spur}\, A := \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \quad \in K,$$

also als die Summe ihrer Diagonaleinträge. Man zeige:

(a) Für alle $A, A' \in \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ gilt $\mathrm{Spur}(AA') = \mathrm{Spur}(A'A)$.

(b) Sind V ein endlich erzeugter Vektorraum und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, so ist $\mathrm{Spur}\, A_f^{B,B}$ für jede Basis B von V die gleiche Zahl. Wir bezeichnen sie daher auch mit $\mathrm{Spur}\, f$.

(4) Man zeige:

(a) Sind $f\colon V \to V'$ und $g\colon V' \to V''$ zwei lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen sowie B, B' und B'' Basen von V, V' bzw. V'', so gilt

$$A_{g \circ f}^{B,B''} = A_g^{B',B''} \cdot A_f^{B,B'}.$$

(b) Ist $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, K)$ eine Matrix mit $\dim(\mathrm{Im}\, A) = r$, so gibt es Matrizen $A' \in \mathrm{Mat}(m \times r, K)$ und $A'' \in \mathrm{Mat}(r \times n, K)$ mit $A = A' \cdot A''$.