Andreas Gathmann und Julia Amann Sommersemester 2022

Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 4

Abgabe: Mittwoch, 22. Juni bis 12:00

(1) (a) Es seien V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \leq V$ mit $\dim V = 6$, $\dim U_1 = 5$ und $\dim U_2 = 3$. Welche Dimension kann $U_1 \cap U_2$ haben? Gib für jede solche Möglichkeit ein konkretes Beispiel für U_1, U_2 und V an.

(b) Es sei U ein Unterraum eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V. Man zeige: Ist $(x_1, \dots, x_n)$ eine Basis von U und sind $y_1, \dots, y_m \in V$ so dass $(\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m})$ eine Basis von V/U ist, dann ist $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ eine Basis von V.

(2) Es seien $U_1, \dots, U_n$ Unterräume eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V mit $V = U_1 + \cdots + U_n$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$.

(b) Sind $u_i \in U_i$ für $i = 1, \dots, n$ so dass $u_1 + \cdots + u_n = 0$, so gilt bereits $u_1 = \cdots = u_n = 0$.

(c) $U_i \cap (U_1 + \cdots + U_{i-1} + U_{i+1} + \cdots + U_n) = \{0\}$ für alle $i = 1, \dots, n$.

(d) $U_i \cap (U_{i+1} + \cdots + U_n) = \{0\}$ für alle $i = 1, \dots, n-1$.

(e) $\dim V = \dim U_1 + \cdots + \dim U_n$.

(3) Es seien $f\colon V \to W$ und $g\colon W \to Z$ zwei lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen. Zeige, dass die Dimension des Bildes der Verkettung $g \circ f$ abgeschätzt werden kann durch

$$\dim \operatorname{Im} f - \dim \operatorname{Ker} g \leq \dim \operatorname{Im}(g \circ f) \leq \min(\dim \operatorname{Im} f, \dim \operatorname{Im} g).$$

(4) (a) Zeige, dass

$$f\colon \mathbb{R}^2/\operatorname{Lin}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \to \mathbb{R}^2/\operatorname{Lin}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \overline{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} \mapsto \overline{\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

ein wohldefinierter Isomorphismus ist.

(b) Es seien U ein Unterraum eines K-Vektorraums V und $f\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass

$$g\colon V/U \to V/U,\ \overline{x} \mapsto \overline{f(x)}$$

genau dann eine lineare Abbildung definiert, wenn $f(U) \subset U$.