Andreas Gathmann und Julia Amann

Grundlagen der Mathematik 1: Lineare Algebra – Blatt 3

Abgabe: Mittwoch, 8. Juni bis 12:00

(1) In $\mathbb{R}^4$ seien $U_1 = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ und $U_2 = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

(a) Bestimme jeweils die Dimension und eine Basis von $U_1 + U_2$ und $U_1 \cap U_2$.

(b) Finde einen 2-dimensionalen Unterraum U mit $U + U_1 = \mathbb{R}^4$.

(2) Untersuche die folgenden Familien B auf lineare Unabhängigkeit im $\mathbb{R}$-Vektorraum V:

(a) $B = (x+y, y+z, z+x)$ in $V = \mathbb{R}^5$ für beliebige linear unabhängige Vektoren $x, y, z \in V$;

(b) $B = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_{12})$ in $V = \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto (x-a)^8$;

(c) $B = (g_a)_{a \in \mathbb{R}}$ in $V = \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit

$$g_a \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{für } x \le a, \\ x-a & \text{für } x \ge a. \end{cases}$$

(3) Es seien $f \colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich erzeugten K-Vektorräumen und $U \le W$ ein Unterraum.

Wir wählen Basen $(v_1, \dots, v_r)$ von $\operatorname{Ker} f$ und $(y_1, \dots, y_s)$ von $U \cap \operatorname{Im} f$. Ferner sei $x_i \in V$ ein Urbild von $y_i \in W$ unter f für alle $i = 1, \dots, s$.

Zeige, dass $(v_1, \dots, v_r, x_1, \dots, x_s)$ dann eine Basis von $f^{-1}(U)$ ist. Insbesondere gilt also

$$\dim f^{-1}(U) = \dim \operatorname{Ker} f + \dim(U \cap \operatorname{Im} f).$$

(4) Es sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die rekursiv definierte Folge natürlicher Zahlen, die durch $a_0 = 42$, $a_1 = 21$ und die Rekursionsgleichung

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{$*$}$$

gegeben ist, also die Folge $(42, 21, 63, 84, 147, 231, \dots)$. Wir wollen in dieser Aufgabe eine explizite Formel für das n-te Folgenglied a_n herleiten.

Es sei dazu $V \le \operatorname{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der Unterraum aller reellen Zahlenfolgen, die die Rekursionsgleichung $(*)$ erfüllen (ihr braucht nicht nachzuweisen, dass dies wirklich ein Unterraum ist, solltet euch aber trotzdem kurz überlegen, warum das so ist).

(a) Für welche $q \in \mathbb{R}$ liegt die Folge $(q^n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, q, q^2, q^3, \dots)$ in V?

(b) Zeige, dass $\dim V = 2$, und bestimme eine Basis von V.

(c) Berechne eine explizite nicht-rekursive Formel für die Glieder der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.